





# **Introdução à Investigação Operacional**

**João M. S. Carvalho**

Bubok Publishing S.L., 2014

1ª edição

ISBN:

Impresso em Portugal / *Printed in Portugal*

Editado por Bubok Publishing

## Conteúdo

<b>1. Introdução.....</b>	<b>9</b>
Definição.....	9
Origens e Evolução Histórica .....	9
Técnicas de Investigação Operacional.....	10
Paradigmas e Equívocos .....	15
Os Cenários de Decisão .....	17
Metodologia da Investigação Operacional .....	17
Exemplo: A Corticeira .....	18
Exercício .....	21
<b>2. Programação Linear.....</b>	<b>23</b>
O Modelo PL .....	23
Hipóteses e Propriedades Fundamentais.....	24
Noções sobre Conjuntos Convexos .....	25
O Método Simplex.....	26
Fundamentos Teóricos do Método Simplex .....	26
Representação Matricial .....	29
Algoritmo Simplex Primal.....	30
Solução Degenerada .....	34
Z Ilimitado .....	35
Conversão de Problemas e Otimização .....	35
Obtenção de uma Base Inicial .....	35
Inconsistência e Redundância.....	37
Solução pelo Método do Grande M.....	37
Solução pelo Método das Duas Fases.....	40

Exercício.....	42
Algoritmo Simplex para Variáveis Limitadas.....	46
Violação das Regras Canónicas .....	52
Dualidade .....	52
Algoritmo Simplex Dual .....	59
Cálculo Matricial das Soluções Primal e Dual.....	61
Análise de Pós-Otimização .....	65
Novas variáveis ou restrições.....	65
Análise de Sensibilidade .....	65
Análise de Variação .....	67
Exemplo Global.....	69
Programação Inteira .....	87
Exemplo .....	87
<b>3. Modelo de Transporte.....</b>	<b>89</b>
Conceitos gerais .....	89
Exemplo .....	89
Algoritmo Simplex de Transporte.....	90
<b>4. Modelo de Afetação .....</b>	<b>95</b>
Conceitos gerais .....	95
Exemplo .....	96
Outros Casos .....	100
Exercício.....	100
<b>5. Otimização de Redes .....</b>	<b>105</b>
Tipos de problemas .....	105
Exemplo .....	106

Algoritmo de Kruskal .....	106
Algoritmo de Prim .....	107
Algoritmo de Dijkstra .....	110
Algoritmo de Ford-Fulkerson .....	112
Algoritmo de Busacker-Gowen .....	115
<b>6. Exercícios .....</b>	<b>117</b>
<b>7. Soluções .....</b>	<b>125</b>
<b>8. Apêndice 1 – Álgebra Matricial .....</b>	<b>131</b>
Representação matricial de equações .....	131
Operações com matrizes .....	132
Matriz transposta e matriz inversa .....	132
Resolução de equações com matrizes .....	135
<b>9. Apêndice 2 – Formulário .....</b>	<b>137</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>139</b>





# 1. Introdução

## Definição

A Investigação Operacional (IO) tem como objeto o estudo e a investigação de operações e sistemas mais ou menos complexos, que combinam simultaneamente elementos humanos e materiais, procurando através de técnicas quantitativas apoiar a tomada de decisões aos níveis macro e microeconómico. O analista ou técnico de IO trabalha os dados, obtendo elementos quantitativos que fundamentam a tomada de decisões. No entanto, são os gestores (ou outros agentes de decisão) que definem os objetivos e que tomam as decisões.

Os problemas, que a IO procura ajudar a resolver, podem ser estruturados e não estruturados, e de nível estratégico, tático ou operacional. Os problemas estruturados resolvem-se de forma conhecida, estando tipificados e tendo mais a ver com elementos materiais.

Ao nível estratégico temos as grandes decisões tomadas, por exemplo, pelo Conselho de Administração, envolvendo a estrutura como um todo, e todos os elementos materiais e humanos.

Ao nível tático, por exemplo nos Departamentos de uma empresa, colocam-se as questões que envolvem mais o elemento humano do que o elemento material, existindo mais problemas não estruturados do que a nível operacional.

Ao nível operacional, por exemplo dos funcionários, existe mais o controlo de tarefas e procedimentos, tendo mais a ver com elementos materiais do que humanos, predominando os problemas estruturados.

A gestão da produção é talvez o domínio em que as aplicações de programação linear são mais numerosas. Contudo, tanto em marketing, (determinação de políticas de preços, de afetação da força de vendas e de distribuição), como nas finanças (escolha de programas de investimento), na logística (gestão dos transportes), ou nos recursos humanos (afetação de pessoal), a IO é um auxiliar precioso para a determinação eficaz de soluções, que melhor satisfaçam os objetivos definidos inicialmente.

## Origens e Evolução Histórica

Do início do séc. XX até à 2ª Guerra Mundial não existe IO, mas apenas alguns trabalhos sobre matérias que hoje fazem parte da IO:

- 1918 – Filas de espera – tratamento estatístico (Erlang)
- 1925 – Quadro matricial input/output (Leontieff)

- 1928 – Teoria dos jogos – (Von Neumann)
- 1929 – Gestão de stocks – económica (Wilson)
- 1936 – Teoria dos grupos – planeamento de atividades (König)
- 1939 – Início da programação linear (Kantorovitch)
- 1945 – Investigação operacional – surge no âmbito das forças aliadas, tendo por objetivo investigar a forma de melhorar as decisões tomadas relativamente a recursos logísticos e às operações das forças armadas.

Entre 1939 e 1951 são conseguidos desenvolvimentos teóricos no âmbito da Programação Linear (PL) por Von Neumann, Harold Kuhn e A. W. Tucker; é formulado o algoritmo Simplex por George B. Dantzig; e aparecem formulações aplicadas da PL por T. C. Koopmans, A. Charnes e W. W. Cooper.

A partir de 1951, data do primeiro simpósio sobre PL, surgiram inúmeros trabalhos procurando completar as suas bases teóricas, melhorar a eficiência computacional dos seus algoritmos e aperfeiçoar o grau de realismo das suas formulações.

## Técnicas de Investigação Operacional

A **programação matemática** inclui as programações linear e não linear.

O seu desenvolvimento foi inspirado por três tipos de problemas:

- **Transporte:** otimização de sistemas (programas) de distribuição, conhecendo-se os custos de transporte, a procura prevista para cada loja e as capacidades máximas de produção de cada fábrica.

- **Composição:** otimização da composição de uma dieta, minimizando o seu custo e satisfazendo os níveis mínimos de calorias e vitaminas necessários na alimentação.

- **Formação e produção:** otimização de programas de contratação e formação de pessoal, assim como de produção e armazenamento, de forma a minimizar os custos e a maximizar os lucros.

Utilizam-se técnicas de otimização matemática, nomeadamente, os algoritmos Simplex primal e dual.

A chamada programação inteira é também um problema de PL, onde se exige a integralidade das variáveis.

A programação não linear implica funções não lineares no equacionamento do problema.

A **programação dinâmica** consiste num processo de decisão multifásico, o qual pode ser desdobrado numa determinada sequência de etapas, as quais podem ser completadas de uma ou várias maneiras. As opções para se completarem as etapas são chamadas decisões. Uma política é uma sequência de decisões. Há custos e benefícios associados a cada decisão em cada fase, e estes retornos podem variar quer com a fase, quer com o estado do processo. O objetivo da análise de tais processos é a determinação de uma política ótima, que resulte no melhor retorno total.

**Exemplos:** uma sucessão de investimentos de diversos tipos; a produção de bens em lotes anuais para satisfazer uma encomenda; a substituição de máquinas; etc.

Ao contrário da PL, não existe uma formulação matemática padrão do problema. Em vez disso, a programação dinâmica é um tipo genérico de metodologia para resolução de problemas, e as equações particulares usadas têm de ser desenvolvidas para cada situação. Utilizam-se técnicas de PL, assim como distribuições de probabilidade, valores atualizados, etc.

Os **modelos de otimização de redes** são utilizados em problemas de minimização de percursos, maximizações de fluxos, etc., sendo utilizados nas áreas da produção, da distribuição, do planeamento de projetos, do posicionamento de instalações, da administração de recursos e do planeamento financeiro. Muitos modelos de otimização de redes são tipos especiais de problemas de PL, como nos casos dos problemas de transportes e de afetação. Uma rede é um conjunto de pontos, designados por nós, e de curvas, chamadas ramos (arcos ou ligações), que ligam um certo número de pares de nós.

**Há 5 tipos de problemas que podem ser modelizados em rede:**

- (1) o do caminho mais curto – vai sendo determinado na rede, nó a nó;
- (2) o da árvore de expansão mínima – em cada nó escolhe-se o caminho mais curto para os nós desconectados seguintes;
- (3) o do fluxo máximo – determinar esse número em função das limitações nos arcos, usando o método Simplex;
- (4) o do fluxo de custo mínimo – método Simplex de rede;
- (5) e o do custo mínimo de condução de um projeto – método CPM (Critical Path Method) de relações tempo-custo, seguida da análise do custo marginal ou então da PL para encontrar o plano de projeto ótimo.

**Exemplo** das estradas dentro de um parque natural:

- Qual a menor distância total para um percurso completo? (1)
- Onde devem ser instaladas as linhas telefónicas para que se minimize o número total de km de linha instalada? (2)

- Que rotas escolher para as diversas viagens de modo a maximizar o número de viagens diárias sem violar os limites do número de viagens em cada estrada, individualmente? (3)

A **meta-heurística** fornece tanto uma estrutura geral como diretrizes estratégicas para desenvolver um procedimento heurístico específico, visando atender a determinado tipo de problema. São feitas interações de forma a ir melhorando sempre. Só se chegará à solução ótima se, por acaso, se iniciou o processo na sua proximidade. Com os procedimentos heurísticos procura-se descobrir intuitivamente a solução ótima, a qual não está garantida.

A **teoria dos jogos** aplica-se quando há mais do que um decisor em concorrência ou cooperação, o que se denomina um jogo. Há jogos de soma nula, em que o ganho de um jogador é a perda do outro, e jogos de soma não nula, que apelam à cooperação entre os jogadores para que ambos maximizem os seus ganhos. Esta teoria permite a análise da forma como se estabelecem as decisões em concorrência ou cooperação em diversos modelos de mercados, os chamados modelos de economia industrial. Há aplicações na gestão, nomeadamente em termos de estratégias de marketing, de contratação de recursos humanos, de leilões, de seguros, de processos negociais, etc.

**Exemplo** do dilema dos prisioneiros, em que dois assaltantes são presos para interrogatório. Acontece que se ambos confessarem terão 6 meses de prisão cada um; caso não o façam poderão estar presos um mês, mas se um confessar e denunciar o outro, então sai em liberdade e o que negar terá 12 meses de prisão. Obviamente, os interrogatórios são conduzidos em separado, procurando a polícia obter as confissões dos dois. A tabela de resultados possível é a seguinte:

		Carlos	
		Nega	Confessa
José	Nega	-1, -1	-12, 0*
	Confessa	0*, -12	-6*, -6*

Então cada um pensará estrategicamente no que poderá estar a acontecer com o outro, partindo do princípio que não existe confiança plena entre eles.

O José pensa: se o Carlos negar, então a melhor estratégia será ele confessar, pois sairia em liberdade; mas se o Carlos confessar, então o melhor é também confessar, para que só apanhe 6 meses de prisão. Colocam-se asteriscos junto das melhores respostas estratégicas. O Carlos raciocinará do mesmo modo, logo mais dois asteriscos são colocados na tabela de resultados nas respostas (-6) e (0). Encontra-se a solução do dilema (-6, -6), que configura o chamado equilíbrio Nash: ambos acabam confessando o assalto e são presos por 6 meses.

A **análise de decisão** é utilizada para problemas e decisões em ambientes de muita incerteza, nomeadamente quando se pretende lançar um novo produto, realizar novos

investimentos em títulos, candidatar-se a um concurso de adjudicação pública, criar um projeto agrícola, empreender uma perfuração de busca de petróleo, etc.

Os critérios de decisão utilizados baseiam-se:

- no **prémio mínimo máximo**, em que se escolhe a alternativa cujo prémio seja o máximo dos mínimos;
- na **probabilidade máxima**, em que se escolhe a alternativa com o prémio máximo no estado da natureza mais provável;
- ou na **regra de decisão de Bayes**, em que se calcula o valor esperado de cada alternativa, em função das probabilidades dos respetivos estados da natureza, e se escolhe a que tiver valor mais elevado.

Também se pode utilizar a Teoria da Utilidade ou fazer experimentação, o que nos dá mais informação sobre o problema, melhorando as estimativas de probabilidade e onde se pode utilizar árvores de decisão.

As **cadeias de Markov** são processos que evoluem ao longo do tempo de uma forma probabilística – os chamados processos estocásticos. As cadeias de Markov são um caso particular em que as probabilidades no futuro dependem apenas do estado atual do processo e, portanto, são independentes dos eventos no passado.

Um processo de Markov consiste num conjunto de objetos e de estados, tais que, em qualquer altura, cada objeto deve estar num determinado estado (objetos distintos não precisam de estar em estado distintos); e a probabilidade de que um objeto transite de um estado para outro, num determinado período de tempo, depende apenas desses dois estados. Se o número de estados é finito, ou infinito numerável, o processo de Markov é uma cadeia de Markov.

Utilizam-se matrizes na solução destes problemas. As matrizes de transição fornecem as probabilidades dos estados que poderão ocorrer da próxima vez.

**Exemplos:** famílias economicamente estáveis ou deprimidas – a sua evolução; mudança de marcas de produtos; evolução em programas de formação; evolução climática; etc.

Um processo de decisão de Markov procura otimizar o desempenho numa cadeia de Markov, em vez de a aceitar com as suas matrizes fixas de transição. Para cada estado possível, tomamos uma decisão sobre qual das diversas ações alternativas deve ser realizada naquele estado. A ação escolhida afeta as probabilidades de transição, bem como os custos imediatos (prémios), e os custos subsequentes de operar o sistema. Escolhem-se as ações ótimas em cada estado, considerando os custos. Também se utiliza a PL nestes estudos.

A **teoria das filas de espera** começou com o problema da espera para aceder a uma linha telefónica, ou para o seu encaminhamento. Utilizam-se técnicas baseadas nas distribuições de Poisson (para as chegadas) e exponencial negativa (tempo de atendimento)

em múltiplas situações, assim como técnicas baseadas noutras distribuições. Também se usam cadeias de Markov em tempo discreto ou em tempo contínuo.

A **gestão de aprovisionamento (stocks)** tem a ver com a racionalização dos inventários de matérias-primas, sobresselentes, produtos semiacabados e produtos finais. Pretende-se melhorar e minimizar os custos da cadeia logística, que é responsável pela movimentação e armazenagem de todos os stocks e pelos fluxos de informação necessários para a sua gestão. Esses custos são:

- de funcionamento: aquisição, encomenda (administrativos e de gestão);
- de posse: seguros, impostos, quebras, roubos, rendas, luz, mão-de-obra, segurança, assim como custos de oportunidade;
- e de rutura.

Utilizam-se modelos de análise determinísticos ou aleatórios, baseados em filosofias *push* (desencadeadas pelo produtor), ou *pull* (desencadeadas pelos clientes finais, onde se destaca o *just-in-time*).

Usam-se técnicas como a EOQ (*Economical Order Quantity*) para determinar o quanto e quando. Se entrarmos em linha de conta com as flutuações da procura e do tempo de reposição do inventário, então usaremos modelos aleatórios.

Também há os chamados sistemas hierárquicos, em que se leva em conta a procura dependente (em função das necessidades de outras produções, e não previsível como a do comércio de retalho, que tem um histórico). Neste caso, utilizam-se sistemas de planeamento de necessidades, como o MRP (*Material Requirement Planning*), mais usado nas áreas de produção industrial, e que sendo aplicado à área da distribuição, chamar-se-á LRP (*Logistic Requirement Planning*).

São importantes os sistemas de informação para que os inventários possam ser bem geridos, utilizando-se também a análise ABC, que classifica os produtos nos tipos A, B e C em função do seu valor de utilização (consumo anual  $\times$  custo do artigo), implicando métodos de previsão mais apurados e sofisticados para os artigos de tipo A e muito menos para os de tipo C (padronizados e de fácil obtenção).

Na **simulação** procura-se imitar o funcionamento de um sistema real através de modelos, que permitem a realização de experiências: modelos em escala reduzida; modelos de circuitos hidráulicos, baseados na analogia com circuitos elétricos; simuladores de voo ou de condução; jogos de computador, etc. Nestes casos, utilizam-se muitas técnicas estatísticas para avaliação dos modelos e resultados.

A **gestão de projetos** tem a ver com a organização de diversos tipos de recursos em equipas orientadas para atingir as metas predefinidas, bem como a coordenação e a gestão das suas atividades segundo critérios de qualidade, eficácia e eficiência.

Utilizam-se técnicas de gestão por objetivos, com modelos de organização do tipo matricial, onde as linhas da matriz correspondem às diversas especialidades dos recursos, que contribuem para a constituição das equipas necessárias e orientadas para atingir as metas definidas (colunas da matriz).

Pretende-se minimizar o tempo de realização do projeto, utilizando-se metodologias de análise de redes de atividades, como o CPM (*Critical Path Method*) e o PERT (*Programme Evaluation and Review Technique*), condicionados pela disponibilização dos recursos.

Nos **modelos de previsão** temos métodos quantitativos de manipulação de dados históricos, procurando-se prever padrões de comportamento; e qualitativos, que assentam em juízos subjetivos e especulações, baseados na experiência e na intuição de especialistas.

Utilizam-se os chamados métodos causais (técnicas de regressão) e os não causais (análise de séries cronológicas, modelos autorregressivos, métodos da decomposição em tendência, sazonalidade, ciclo e componente aleatória – modelos de médias móveis, modelo aditivo, modelo multiplicativo, modelos de alisamento exponencial, modelos para séries com tendência, modelo de Holt, modelo de Brown, modelo de Holt-Winters, etc.).

## Paradigmas e Equívocos

Os **paradigmas**, inerentes à utilização da IO numa perspetiva de apoio aos processos decisórios, são:

- a **racionalidade**: acredita-se na abordagem da razão, como sendo superior às outras abordagens, como, por exemplo, a da afetividade;
- a **estabilidade**: apesar do mundo em mudança, acredita-se na estacionariedade e/ou na estabilidade de muitos fenómenos, permitindo a sua classificação segundo taxonomias diversas;
- o **método**: julga-se prioritário estabelecer métodos para resolver as classes de problemas definidos, desconfiando-se do livre arbítrio ou da intuição;
- o **científico**: acredita-se nas potencialidades da ciência para descrever o real em estudo, para compreender o seu comportamento e para melhorar a capacidade de intervenção;
- a **eficácia**: não se ignorando as fontes de incerteza e aleatoriedade, acredita-se na capacidade de criar sistemas eficazes, isto é, sistemas que permitam atingir as metas predefinidas com índices de fiabilidade muito elevados;
- a **eficiência**: o desenvolvimento de qualquer organização deve pautar-se pelo evitar o desperdício de recursos;

- o **tecnológico**: a realização de qualquer projeto organizacional implica não só concebê-lo, mas também escolher e inventar as tecnologias, os dispositivos e os processos que permitam concretizá-lo da melhor forma;

- o **comportamental**: o estudo das organizações afasta-se das ciências puras ou das aplicadas, por não procurar propriamente teorias ou enunciados universais, mas sim por pretender conhecer o comportamento da realidade em que se vai intervir, a fim de encontrar as respostas em função de intervenções e cenários alternativos de aleatoriedade e incerteza.

Enquanto os **equívocos** são:

- a **substituição**: admitir que os sistemas idealizados podem ou devem substituir os decisores. Pelo contrário, esses sistemas reforçam a importância e as funções próprias do decisor, enaltecendo e sublinhando o significado do seu papel;

- a **omnisciência**: dar pouco interesse aos sistemas de apoio à decisão, acreditando que o saber, a experiência e a intuição do decisor são suficientes. Estes atributos são essenciais e é, justamente, para os aperfeiçoar, que se devem desenvolver sistemas que adquiram e tratem a informação, visando contribuir para a formação do conhecimento importante para os processos de decisão;

- a **urgência**: os processos de decisão são cada vez mais exigentes em termos de tempo, mas essa urgência resulta mais frequentemente do deficiente desenvolvimento do seu processo do que da sua própria natureza. As potencialidades informáticas e dos novos modelos têm vindo a ultrapassar as metas de tempos passados, pelo que não recorrer à via científica por imperativo de urgência é, cada vez mais, um equívoco de difícil sustentação.

- a **especificidade**: diz respeito à convicção de que os problemas vividos por cada decisor são sempre substancialmente distintos dos restantes vividos pelos outros responsáveis da mesma ou de outras organizações.

Há que procurar racionalizar os processos de decisão, pois os problemas são muito variados, o que implica escolhas relativamente à afetação de recursos, humanos e/ou materiais, que incluem características de aleatoriedade ou incerteza, e que apresentam um carácter fortemente combinatório, ou seja, a configuração de cada decisão resulta de uma combinação de escolhas parcelares, pelo que a extensão do conjunto de alternativas cresce rapidamente, atingindo níveis muito superiores aos dominados pela intuição humana.

O estudo destes problemas de decisão tem vindo a exigir um esforço de teorização baseado, principalmente, na teoria dos sistemas, que agrega os conceitos de decisor, sistema (objeto da decisão, isto é, conjunto de realidades que serão afetadas pelas escolhas contidas na decisão, o que pressupõe o estabelecimento de uma fronteira que separe tais realidades das restantes), alternativas, ação, fatores de incerteza, resultado, atributos, informações do decisor e modelo de decisão.



Um sistema pode ser genericamente entendido como um conjunto de entidades (homens, máquinas, materiais, etc.) que interagem tendo em vista determinados fins.

## Os Cenários de Decisão

**Certeza:** quando se consegue identificar soluções para o problema e sabe-se com exatidão o resultado final dessas soluções – os problemas combinatórios resolvidos, por exemplo, pela Programação Linear.

**Incerteza:** quando apresentada uma solução, o resultado é incerto porque depende da decisão dos concorrentes – os problemas concorrenciais, que podem ser resolvidos no âmbito da Teoria dos Jogos.

**Risco:** quando apresentada uma solução, se define um risco, uma probabilidade para cada resultado possível – os problemas estocásticos resolvidos na Teoria das Filas de Espera ou na Gestão Económica de Stocks.

A programação linear insere-se num cenário de certeza, utilizando-se modelos lineares determinísticos de otimização, aplicados a problemas combinatórios com uma infinidade de soluções mas sujeitos a restrições, e resolvendo-se por recurso a técnicas algorítmicas.

O processo de decisão usa mais a intuição e a capacidade de julgamento em problemas não estruturados e complexos em ambiente instável; e os métodos quantitativos em problemas estruturados e simples, em ambiente estável.

## Metodologia da Investigação Operacional

A metodologia da IO utiliza 4 recursos importantes:

1. A análise sistémica e a definição do problema como pertencente a um todo, sendo equacionadas as perspetivas de todos os setores da empresa e recolhida toda a informação relevante. É feita uma descrição sumária da situação, a análise do contexto do problema e do objetivo a que se destina o estudo.
2. A interdisciplinaridade na visão do problema. Os fenómenos em estudo só são cabalmente compreendidos quando exista o contributo de todas as áreas de especialidade relevantes para o assunto em causa.
3. A utilização de modelos. As situações reais não são experimentáveis, logo recorre-se a modelos, que representam a realidade de forma mais simples, para a estudar e interpretar.

Tipos de modelos:

- **Ícónicos** (ex: fotos): representam fielmente a realidade, mas com uma escala diferente.
- **Analógicos** (ex: gráficos): utilizam propriedades que representam por analogia outro tipo de propriedades, estados ou situações.
- **Simbólicos**: utilizam símbolos para representar a realidade. Exemplo destes são os modelos matemáticos, que são os mais abstratos, manipuláveis e adaptáveis. Nestes temos modelos lineares (relações do 1º grau entre as variáveis) e os não lineares (relações de outros graus). Os modelos podem ainda ser determinísticos/exatos ou aleatórios/estocásticos.

4. Recurso ao método científico:

- a) Formulação do problema: objetivos, variáveis controláveis e não controláveis, condicionantes, parâmetros impostos, restrições, agentes de decisão.
- b) Construção do modelo matemático: função objetivo, relações entre as variáveis.
- c) Obtenção da solução: cálculo da solução ótima, utilizando o método Simplex.
- d) Testar o modelo e a solução: ver novas variáveis, erros cometidos, etc.
- e) Estabelecer o controlo da solução: análise de sensibilidades e análises paramétricas.
- f) Implementação da solução: problemas técnicos e humanos, etc.

## Exemplo

A empresa “Corticeira” produz e comercializa dois tipos de produtos: ladrilhos para o chão e rolhas de cortiça. Ambos os produtos utilizam na sua produção cortiça e mão-de-obra. Os lucros previstos são de 6 euros por  $m^2$  vendido de ladrilhos, e de 5 euros por Kg de rolhas. Para produzir 1 Kg de rolhas são necessários 2 kg de cortiça em bruto, enquanto que para produzir 1  $m^2$  de ladrilhos são necessários 3 kg de cortiça em bruto. A empresa recebe, diariamente, 450 Kg de cortiça em bruto. A mão-de-obra é constituída por 10 operários que trabalham 8h por dia. Um Kg de rolhas leva meia hora a produzir, enquanto um  $m^2$  de ladrilhos se produz em 15 minutos. A administração da “Corticeira” pretende saber quais as quantidades a produzir diariamente de cada um dos produtos de forma a maximizar o lucro.

**Formulação ou o equacionar do problema:**

Definição das variáveis:

$$Z = \text{lucro total}$$

$$x_1 = \text{quantidade de ladrilhos (m}^2\text{)}$$

$$x_2 = \text{quantidade de rolhas (kg)}$$

Qual o objetivo deste problema? Pretende-se maximizar o lucro. A Função Objetivo diz-nos como calcular o lucro da empresa:

$$\text{Máx } Z = 6x_1 + 5x_2$$

Quais as limitações ou restrições à produção? Procuram-se os totais de recursos disponíveis (termos independentes) e formulam-se as equações ou inequações que discriminam a forma como esses recursos são afetados à produção dos produtos, através dos respetivos coeficientes técnicos. Não esquecer a necessidade de, em cada restrição, utilizar a mesma unidade de medida.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 450 \quad (\text{limitação da matéria-prima em kg})$$

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 80 \quad (\text{limitação da mão-de-obra em horas})$$

Estabelece-se a condição de não-negatividade para todas as variáveis de decisão:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{limitação da não negatividade})$$

**Resolução gráfica:**

Calculam-se os “zeros” das funções, porque é o método mais fácil de desenhar as retas e de as enquadrar corretamente no sistema de eixos ortogonais:

1ª restrição:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 225$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 150$$

2ª restrição:

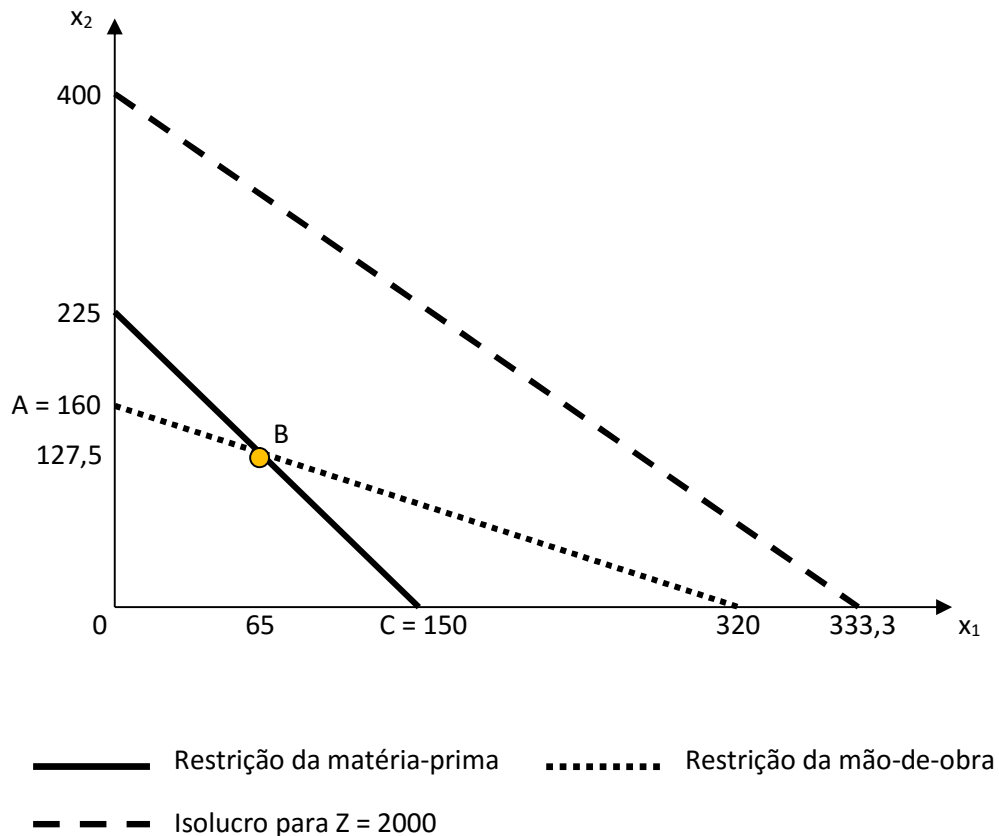
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 160$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 320$$

Função objetivo (temos 2 graus de liberdade, logo é necessário atribuir um valor a Z):

$$x_1 = 0 \text{ e } Z = 2000 \Rightarrow x_2 = 400$$

$$x_2 = 0 \text{ e } Z = 2000 \Rightarrow x_1 = 333,3$$



O espaço de soluções possível consiste em todos os pontos do perímetro e do interior do quadrilátero [ABCO]. Verifica-se que se deslocarmos a isolucro ( $Z = 2000$ ) para baixo, esta encontrará o vértice  $B = (65; 127,5)$ , o qual corresponde ao ponto ótimo.

**Resolução do sistema de equações** (e não de inequações) das restrições de matéria-prima e de mão-de-obra:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 450 \\ 0,25x_1 + 0,5x_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 65 \text{ m}^2 \text{ ladrilhos} \\ x_2 = 127,5 \text{ kg rolhas} \end{cases}$$

Então, o lucro máximo possível é de:

$$Z = 6 \times 65 + 5 \times 127,5 = 1.027,50 \text{ €}$$

## Exercício

Função objetivo:  $\text{Máx } Z = 12 x_1 + 10 x_2 - 840$

Restrição 1:  $5 x_1 + 8 x_2 \leq 500$

Restrição 2:  $4 x_1 + x_2 \leq 300$

Condição de não negatividade:  $x_1, x_2 \geq 0$

**Para a resolução gráfica:**

1ª restrição:  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 62,5$

1ª restrição:  $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 100$

2ª restrição:  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 300$

2ª restrição:  $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 75$

Objetivo para  $Z = 260$   $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 110$

Objetivo para  $Z = 260$   $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 91,67$

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 = 500 \\ 4x_1 + x_2 = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 + 8 \times (300 - 4x_1) = 500 \\ x_2 = 300 - 4x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} -27x_1 = -1900 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 70,37 \\ x_2 = 18,52 \end{cases}$$

$$Z = 12 \times 70,37 + 10 \times 18,52 - 840 = 189,64$$



## 2. Programação Linear

### O Modelo PL

Nas fórmulas do Modelo de Programação Linear assume-se que o índice  $i$  representa o número da linha, e o índice  $j$  o número da coluna.

Na **forma canónica** básica do modelo de otimização temos:

- $n$  variáveis principais ou de decisão  $x_j$
- $n$  coeficientes da função objetivo  $c_j$
- $m$  restrições

Os coeficientes e as constantes nas restrições e na função objetivo denominam-se **parâmetros do modelo de PL**:

Função objetivo (máx. ou mín.): 
$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Satisfazendo as restrições: 
$$r_j \equiv \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} b_i$$

Sendo  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  a restrição de não negatividade.

$Z$  – valor da medida de desempenho global que queremos otimizar (lucro, custos, área utilizada, desperdício, etc.)

$x_j$  – nível de atividade  $j$  (para  $j = 1, 2, \dots, n$ ), constituindo as variáveis de decisão.

$c_j$  – coeficientes da função objetivo que nos dão o incremento em  $Z$ , que resulta dum incremento unitário no nível de atividade  $j$ .

$a_{ij}$  – coeficientes técnicos. Coeficiente da variável  $x_j$  na restrição de ordem  $i$ , constituindo a quantidade do recurso  $i$  consumido por unidade de atividade  $j$ .

$b_i$  – termo independente da  $i$ ésima restrição, sendo a quantidade do recurso  $i$  que se encontra disponível para alocação nas atividades  $x_j$  (para  $i = 1, 2, \dots, m$ ).

O sistema de restrições é constituído por  $m$  equações e  $n$  incógnitas, com  $n \geq m$ , o que implica  $(n - m)$  graus de liberdade. Logo, é um sistema indeterminado, porque existem mais incógnitas do que equações, o que implica, em geral, mais do que uma solução.

Admitindo que as restrições são linearmente independentes, é possível exprimir  $M$  variáveis em função dos valores atribuídos às restantes  $(N - M)$ . Qualquer solução, obtida desta forma, que satisfaça o sistema, diz-se uma **solução possível** do problema. O conjunto de todas as soluções possíveis designa-se por **domínio das soluções possíveis**. Se as variáveis restantes forem igualadas a zero, a solução designa-se como **solução básica possível** (ou admissível). Neste caso, as  $M$  variáveis designam-se por **variáveis básicas** e as restantes como **não básicas**. Se alguma variável básica for igual a zero, a solução básica diz-se **degenerada**, a qual levanta problemas de cálculo. A **solução ótima** é a que otimiza a função objetivo.

O **Teorema Fundamental da Programação Linear** diz que se existe uma solução possível, então existe uma solução básica possível, e se existe uma solução ótima possível, então existe uma solução ótima básica possível. Deste teorema conclui-se que não é necessário procurar a solução ótima entre todas as soluções possíveis (em geral, infinitas) do problema, mas apenas entre as soluções básicas possíveis. O número máximo destas soluções é dado pelas  $C_M^N$ .

Na PL desenvolve-se um método de passar de uma solução básica possível para outra, que corresponda a um melhor valor da função objetivo, e que disponha de um critério que permita saber quando se alcançou a solução ótima, sem necessitar de experimentar todas as soluções básicas possíveis. Assim, pretende-se passar de vértice para vértice do polítopo das soluções possíveis, melhorando sempre o valor da função objetivo; e aplicar um critério de otimalidade que permita saber se um vértice ótimo foi alcançado. Podemos encontrar soluções viáveis, possíveis ou admissíveis. Há também soluções inviáveis, impossíveis ou não admissíveis.

**Teste de otimalidade:** se uma solução num ponto extremo não tiver nenhuma solução em ponto extremo adjacente que seja melhor, então ela tem de ser uma solução ótima.

## Hipóteses e Propriedades Fundamentais

**Determinismo:** não se consideram os cenários de incerteza ou risco, não existindo qualquer valor aleatório ou probabilístico. Conhecidos os parâmetros, eles determinam um conjunto de soluções para o problema.

**Certeza:** o valor atribuído a cada parâmetro de um modelo de PL é assumido como uma constante conhecida.



**Linearidade:** todas as relações são do 1º grau, o que implica as propriedades da aditividade, da proporcionalidade e da continuidade. Pressupõe-se que a contribuição marginal de cada atividade é constante.

**Não negatividade:** incógnitas (as intensidades de cada atividade) não negativas.

**Divisibilidade** (continuidade): as variáveis podem assumir valores não inteiros.

**Aditividade:** implícita na função objetivo e nas restrições. Pressupõe-se que se pode utilizar as capacidades máximas na produção e nos recursos, não havendo deseconomias internas, conseguindo-se a total eficiência dos recursos envolvidos. Toda a função num modelo de PL é a soma das contribuições individuais das respectivas atividades.

**Proporcionalidade:** implícita na função objetivo e nas restrições. Os coeficientes são constantes, pressupondo que não há economias de escala, sendo a produção a custos constantes ( $P_{mg} = 1$ ) e a rendimentos constantes ( $R_{mg} = 1$ ) à escala. Assim, a contribuição  $c_j$  de cada atividade para o valor  $Z$  da função objetivo é proporcional ao nível de atividade  $x_j$ , conforme representado no termo  $c_j x_j$ .

## Noções sobre Conjuntos Convexos

**Combinação linear convexa** – seja um conjunto de pontos  $x_i$  e  $X$ .

Diz-se que  $X$  é uma combinação linear convexa dos pontos  $x_i$  se  $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

Em que  $\lambda_i$  são os coeficientes escalares que terão de assumir os seguintes valores:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Ou seja, dois pontos definem um segmento de reta e uma combinação linear convexa, que é igual ao segmento que os une.

**Conjunto convexo** – quando, para quaisquer dois pontos desse conjunto, toda a combinação linear por eles definida é constituída por pontos pertencentes ao conjunto.

**Ponto extremo de um conjunto convexo** – quando não se consegue expressá-lo ou defini-lo como combinação linear convexa de quaisquer outros dois pontos pertencentes ao conjunto, mas só a partir dele próprio (ex: vértices de um retângulo).

### Aplicação das noções de conjuntos convexos à PL:

O conjunto de soluções possíveis de um qualquer problema de PL é um conjunto convexo com um número finito de pontos extremos, e a solução ótima encontrar-se-á, pelo menos, num dos seus pontos extremos.

## O Método Simplex

O método Simplex concentra-se, exclusivamente, nas soluções de ponto extremo, que existirão se o conjunto de soluções for convexo. Consiste num **algoritmo iterativo** (procedimento sistemático para atingir uma solução e que repete uma série de passos) com a seguinte estrutura:

Inicialização (normalmente a origem) → teste de otimalidade →

- se sim, pára;
- se não, continua → iteração

Dada uma solução de ponto extremo, é muito mais rápido recolher informações sobre as soluções de pontos extremos adjacentes, do que sobre todas as outras. O percurso faz-se ao longo dos lados da região das soluções viáveis.

Após a solução de ponto extremo ter sido identificada, o método Simplex examina cada um dos lados da região de soluções viáveis, identificando a taxa de crescimento de Z e escolhendo a que for maior.

Se num ponto extremo de solução não existir taxa de crescimento do Z, então encontramos a solução ótima.

## Fundamentos Teóricos do Método Simplex

### Hipóteses:

- É um sistema consistente, possível, não havendo incompatibilidade entre as restrições.
- As restrições são linearmente independentes, não havendo equações redundantes, não havendo repetição da informação.
- O número de restrições é menor que o número de variáveis. O sistema é indeterminado.
- Se alguma destas hipóteses não se verificar, então não há problema.

### Teoremas:

- O conjunto de soluções admissíveis num problema de PL é um conjunto convexo com um número finito de pontos extremos.
- Uma função linear, cujo domínio é um conjunto convexo, assume o seu valor ótimo em pelo menos um ponto extremo.
- A uma solução básica admissível de um modelo de PL corresponde um ponto extremo do conjunto convexo das soluções admissíveis.

### Condições:

- A **restrição de não negatividade** é obrigatória.
- Não é possível aplicar o método a um problema na forma geral, terá que se passar para a **forma padrão ou aumentada**. Transforma-se o sistema de inequações e/ou equações, associadas às restrições, exclusivamente num sistema de equações. Recorre-se, para isso, às chamadas **variáveis auxiliares, de desvio ou de folga** ( $s_i$ ), assim como a **variáveis artificiais** ( $a_i$ ). Estes novos tipos de variáveis permitem obter uma matriz identidade no quadro Simplex, constituindo-se como a **base inicial**.
  - caso a inequação seja  $\leq$  acrescenta-se uma variável auxiliar  $s_i$  com sinal positivo;
  - caso a inequação seja  $\geq$  acrescenta-se uma variável auxiliar  $s_i$  com sinal negativo e uma variável artificial  $a_i$  com sinal positivo; isto porque o coeficiente negativo da variável auxiliar não permite ter um vetor da matriz identidade;
  - caso seja uma equação, acrescenta-se uma variável artificial com sinal positivo, de modo a ter aqui um vetor da matriz identidade.

### Exemplo da transformação na forma padrão:

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 - Ma_1 - Ma_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 120$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 + a_1 = 120$$

$$3x_1 + 0,5x_3 \geq 20$$

$$3x_1 + 0,5x_3 - s_2 + a_2 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$$

Começa-se pelas restrições:

- na primeira ( $\leq$ ) tem de se acrescentar uma variável de folga  $s_1$ . O número do índice deve-se ao facto de ser a primeira variável auxiliar acrescentada.
- na segunda ( $=$ ) tem de se acrescentar uma variável artificial  $a_1$ .
- na terceira ( $\geq$ ) subtrai-se a variável auxiliar  $s_2$  e soma-se a variável artificial  $a_2$ .

Segue-se a função objetivo:

- as **variáveis auxiliares** têm significado económico (num problema de produção, correspondem a quantidades de recursos não utilizadas), mas não têm peso no cálculo do valor de  $Z$ , que queremos otimizar. Por isso, são sempre acrescentadas com o coeficiente zero.
- as **variáveis artificiais** não têm qualquer significado económico, logo são acrescentadas com o coeficiente  $M$  (número infinitamente grande), de modo a poderem ser retiradas aquando da aplicação do algoritmo Simplex. O sinal de  $M$  deverá ser contrário ao da otimização: positivo para minimizações e negativo para maximizações.

**Uma solução básica tem as seguintes propriedades:**

- Cada variável ou é básica ou não básica.
- O número de variáveis básicas é igual ao número de restrições funcionais (agora equações). Portanto, o número de variáveis não básicas é igual ao número total de variáveis menos o número de restrições funcionais.
- As variáveis não básicas têm valor de zero.
- Os valores das básicas são obtidos com a solução simultânea das equações. O conjunto das variáveis básicas é chamado a **Base**.
- Se as variáveis básicas satisfizerem a restrição de não negatividade, a solução básica é uma solução básica viável.

## Representação Matricial

$$\mathbf{X} - \text{vetor das variáveis } x_i \text{ do modelo} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} - \text{vetor dos coeficientes } c_j \text{ das variáveis da função objetivo} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$\mathbf{A} - \text{matriz dos coeficientes } a_{ij} \text{ das restrições} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} - \text{vetor dos termos independentes } b_i \text{ das restrições} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\text{Função objetivo: } \text{Máx } Z = \mathbf{C} \mathbf{X}$$

$$\text{Restrições: } \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\text{Condição de não-negatividade: } \mathbf{X} \geq 0$$

## Algoritmo Simplex Primal

O algoritmo Simplex primal permite solucionar problemas de programação linear utilizando várias técnicas de operações com matrizes implícitas no chamado Quadro Simplex. Para construir este quadro é preciso passar da formulação inicial do problema (forma canônica) para a chamada forma aumentada (forma padrão), seguindo as regras apontadas atrás.

### Exemplo de maximização:

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

### Forma aumentada:

$$Z - 3x_1 - 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

### Retirada dos coeficientes para construir o quadro inicial Simplex:

$$Z - \mathbf{3}x_1 - \mathbf{4}x_2 + \mathbf{0}s_1 + \mathbf{0}s_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{4}x_1 + \mathbf{2}x_2 + \mathbf{1}s_1 + \mathbf{0}s_2 = \mathbf{80}$$

$$\mathbf{2}x_1 + \mathbf{5}x_2 + \mathbf{0}s_1 + \mathbf{1}s_2 = \mathbf{120}$$

A **base inicial** (B) é sempre constituída pelas variáveis que determinam uma matriz identidade no quadro Simplex. Logo são, neste caso, as variáveis de folga  $s_1$  e  $s_2$ .

$$B = \{s_1; s_2\} \quad b_1 = 80 \quad ; \quad b_2 = 120$$

A primeira linha do quadro chama-se **linha zero**, porque corresponde aos coeficientes da função objetivo. A partir da segunda linha do quadro, que chamamos linha 1 temos as restrições do problema, que estarão então nas linhas 1 e 2 deste exemplo.

Estabelecendo que  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ , a coluna do lado direito do quadro dá-nos a solução para as variáveis básicas, sendo a solução inicial  $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 80, 120)$ , resultando em  $Z = 0$ .

O algoritmo Simplex primal utiliza 3 critérios nas iterações:

- **Otimidade** – a solução só é ótima se na linha zero todos os valores forem positivos ou nulos;
- **Entrada para a base** – escolher a variável que apresente o valor mais baixo negativo na linha zero;
- **Saída da base** – na coluna da variável que entra faz-se o teste da razão mínima, só com os coeficientes positivos como denominadores. Isto é, dividem-se os valores da coluna **b** pelos da coluna da variável que vai entrar para a Base. Escolhe-se o menor valor destes rácios, determinando a variável que sai da Base. Garante-se, assim, uma iteração admissível para a solução básica seguinte, porque determinamos qual a variável que se anula em primeiro lugar. Não se poderá escolher um valor superior a esse mínimo, pois isso implicaria violar a restrição de não negatividade.

Caso haja empates, tanto no critério de entrada como no de saída, a escolha será arbitrária.

O valor **pivô** é o que se encontra na célula de interseção entre a coluna da variável que entra e a linha da variável que sai.

Na coluna da variável que entra terá que se reconstruir um dos vetores da matriz identidade, de modo a que as variáveis que estão na Base sempre sejam aquelas às quais corresponde tal matriz. Para isso, teremos que ter o valor '1' na célula pivô e '0' nas restantes células da coluna. O método que se utiliza é chamado de **condensação ou eliminação Gaussiana**, o que implica fazer operações entre as linhas de modo a obter os novos valores para a coluna da variável que entrou para a base.

**Quadro inicial**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
<b>Z</b>	-3	-4	0	0	<b>0</b>
$s_1$	4	2	1	0	80
$s_2$	2	5	0	1	120

**Critério de otimalidade:** há 2 valores negativos na linha zero, logo a solução inicial não é ótima. Iniciamos a **iteração 1**:

**Critério de entrada:** o valor mais baixo é (-4), logo a variável que vai entrar para a Base será  $x_2$ . Esta será a variável que maior contributo pode dar para aumentar Z.

**Critério de saída:**  $\min \{80/2 = 40 ; 120/5 = 24\} = 24 \Rightarrow$  sai  $s_2 \Rightarrow$  pivô = 5

**Condensação gaussiana:**

- Dividir a linha 2 ( $L_2$ ) por 5, de modo a obter 1 na célula pivô  $\equiv L_2 / 5 = L^*_2$
- Multiplicar a nova linha 2 por 4 e somar à linha 0, para obter 0  $\equiv 4L^*_2 + L_0$
- Multiplicar a nova linha 2 por -2 e somar à linha 1, para obter 0  $\equiv -2L^*_2 + L_1$

IT1	Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b	
$4L^*_2 + L_0$	Z	-3	-4	0	0	0	
$-2L^*_2 + L_1$	$s_1$	4	2	1	0	80	$80/2 = 40$
$L_2 / 5 = L^*_2$	$s_2$	2	5	0	1	120	$120/5 = 24$

**Quadro 1**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-1,4	0	0	0,8	96
$s_1$	3,2	0	1	-0,4	32
$x_2$	0,4	1	0	0,2	24

**Interpretações de alguns valores no quadro Simplex:**

- $x_2$  entrou para a base e vale, neste momento, 24 unidades, e como o seu lucro unitário é  $c_2 = 4$ , então o lucro Z sobe  $4 \times 24 = 96$ .
- Temos 0,8 na linha zero em  $s_2$ , o que significa que se tivéssemos mais uma unidade do recurso B, então haveria uma diminuição de uma unidade na folga  $s_2$ , a qual provocaria os seguintes efeitos:
  - Z (lucro total) aumentaria 0,8 passando para 96,8;
  - A folga do recurso A ( $s_1$ ) diminuiria 0,4 passando o total do recurso A não utilizado para 31,6 unidades;
  - e o produto  $x_2$  aumentaria 0,2 passando para 24,2 unidades.



- Temos -1,4 na linha zero em  $x_1$ , o que significa que produzir mais uma unidade de  $x_1$  teria os seguintes efeitos:
  - $Z$  aumentaria 1,4 passando para 97,4;
  - $s_1$  diminuiria 3,2 passando para 28,8 unidades em reserva, logo tendo-se utilizado mais 3,2 unidades do recurso A;
  - e o produto  $x_2$  diminuiria 0,4 passando a produzir-se 23,6 unidades.

A regra é que sempre que uma variável tem um incremento positivo, os coeficientes abaixo dela deverão ser interpretados pelo seu simétrico nos efeitos. Quando seja uma variação negativa, então os coeficientes deverão ser interpretados pelo valor e sinal que apresentam.

**Critério da otimalidade:** todos os coeficientes na linha 0 são  $\geq 0$ ? Não. Então temos de continuar as iterações.

#### Iteração 2:

Entra  $x_1$  (-1,4); e sai  $s_1$  [ $\min\{24/0,4 = 60 ; 32/3,2 = 10\} = 10$ ]. Pivô = 3,2

Dividir a linha 1 por 3,2 para obter  $1 \equiv L_1 / 3,2 = L^*_1$

Multiplicar a nova linha 1 por 1,4 e somar à linha 0, para obter  $0 \equiv 1,4L^*_1 + L_0$

Multiplicar a nova linha 1 por -0,4 e somar à linha 2, para obter  $0 \equiv -0,4L^*_1 + L_2$

IT2	Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b	
$1,4L^*_1 + L_0$	Z	-1,4	0	0	0,8	96	
$L_1 / 3,2 = L^*_1$	$s_1$	3,2	0	1	-0,4	32	$32/3,2 = 10$
$-0,4L^*_1 + L_2$	$x_2$	0,4	1	0	0,2	24	$24/0,4 = 60$

#### Quadro 2

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
Z	0	0	7/16	5/8	110
$x_1$	1	0	5/16	-1/8	10
$x_2$	0	1	-1/8	1/4	20

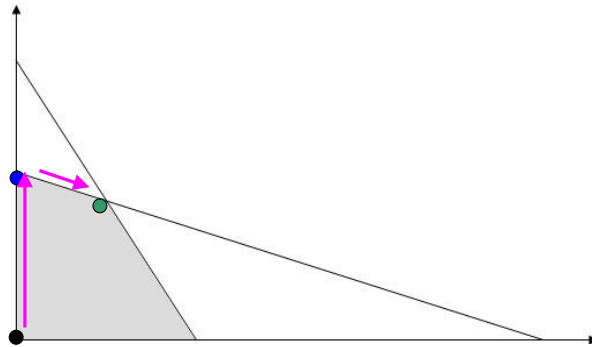
**Critério da otimalidade:** todos os coeficientes na linha 0 são  $\geq 0$ ? Sim. Então atingimos a solução ótima do problema  $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (10, 20, 0, 0)$ , resultando em  $Z = 110$ .

A solução ótima é única porque os coeficientes são positivos nas variáveis não básicas. Caso contrário, a solução seria ótima múltipla ou alternativa.

Os coeficientes das variáveis básicas na linha zero são sempre nulos nos quadros Simplex.

As variáveis auxiliares  $s_1$  e  $s_2$  são não básicas, logo a totalidade dos recursos foi utilizada.

Representação gráfica das iterações efetuadas:



Iniciamos as interações no ponto  $(0,0)$  com  $Z = 0$ .

Depois passamos para o ponto  $(0, 24)$  com  $Z = 96$ .

Terminamos com o ponto  $(10, 20)$  com  $Z = 110$ .

## Solução Degenerada

Acontece o problema da degenerescência quando existe uma variável básica = 0.

Pode surgir na solução básica inicial, no 1º quadro do Simplex. Também pode acontecer numa situação de empate no critério de saída, visto a escolha ser arbitrária, e todos se anulam, logo ficando pelo menos um vetor na base cuja variável é nula. A solução será básica viável degenerada.

### Consequências da degenerescência:

- O valor de  $Z$  pode não aumentar.
- O valor das variáveis pode não se alterar.
- Entrada em ciclo: repetição indefinida de uma determinada sequência de bases sem nunca se chegar à solução básica possível e ótima.

## Z Ilimitado

Se todos os coeficientes da coluna pivô (excluindo a linha 0) são negativos ou zero, então não há nenhuma variável para sair. O valor de Z crescerá indefinidamente. O modelo deverá estar mal formulado, por erro nas restrições ou omissão de restrições relevantes.

## Conversão de Problemas e Otimização

O método Simplex só se aplica a maximizações. Assim, têm de se converter os problemas de minimização.

$$\text{Mín } Z = Z_0$$

$$Z_0 \leq Z \Leftrightarrow Z_0 - Z \leq 0 \Leftrightarrow (-Z_0) - (-Z) \geq 0 \Leftrightarrow -Z_0 \geq -Z$$

$$\text{Logo: } -Z_0 \text{ é um máximo de } -Z \Leftrightarrow Z_0 = \text{Mín } Z = - \text{Máx } (-Z)$$

$$\text{Máx } Z = Z_0$$

$$Z_0 \geq Z \Leftrightarrow Z_0 - Z \geq 0 \Leftrightarrow (-Z_0) - (-Z) \leq 0 \Leftrightarrow -Z_0 \leq -Z$$

$$\text{Logo: } -Z_0 \text{ é um mínimo de } -Z \Leftrightarrow Z_0 = \text{Máx } Z = - \text{Mín } (-Z)$$

Então, para fazer a conversão de um problema de minimização em maximização, basta multiplicamos a função objetivo por **(-1)**.

Atenção que agora, no Simplex, o valor de Z é o simétrico do verdadeiro.

## Obtenção de uma Base Inicial

Num problema com **m** restrições teremos de ter **m** variáveis básicas iniciais, isto é, cada restrição terá de ter uma variável cujo coeficiente seja '**1**' nessa restrição, e '**0**' para as demais. A utilização de variáveis de folga no caso  $\leq$  garante esta regra. No caso de a restrição ser de  $\geq$  então precisamos de utilizar uma variável artificial, visto que a de excesso terá coeficiente '**-1**'. No caso da igualdade numa restrição, também se usa a variável artificial. Estas variáveis artificiais não têm significado económico e deverão ser eliminadas da solução ótima. Se tal não for possível, e ficarem variáveis artificiais positivas na solução ótima, então concluir-se-á que a solução é impossível.

Se todas as restrições forem do tipo  $\leq$ , então a passagem à forma padrão leva-nos a obter a matriz identidade com os coeficientes das variáveis de desvio.

Com outro tipo de restrições,  $\geq$  e/ou  $=$ , tem de se recorrer às variáveis artificiais como instrumento para obter a Base inicial. O coeficiente **M** atribuído às variáveis artificiais, acrescentadas à função objetivo, deve ser anulado para se iniciar o método Simplex. Assim, por eliminação gaussiana, deve-se converter os **M** em zeros, só nas colunas dessas variáveis artificiais. O método das duas fases, inclusive, trata separadamente destas questões: anulam-se os **M**'s – as variáveis artificiais – de modo a chegar-se a uma Base inicial e, depois, resolve-se o problema real, sem que se usem os **M**'s.

Se o problema original não tiver nenhuma solução viável, então a solução final pelos 2 métodos (grande número ou duas fases) tem pelo menos uma variável artificial maior que zero.

### Exemplo:

Forma geral:  $\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2$

Restrições:  $4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 120$$

$$x_1 + 3x_2 = 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma padrão ou aumentada:  $\text{Máx } Z = 3x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 - Ma_1 - Ma_2$

Restrições:  $4x_1 + 2x_2 + s_1 = 80$

$$2x_1 + 5x_2 - s_2 + a_1 = 120$$

$$x_1 + 3x_2 + a_2 = 100$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, a_1, a_2 \geq 0$$

O que permite a Base **B** = [**s**<sub>1</sub> **a**<sub>1</sub> **a**<sub>2</sub>] = [80, 120, 100]

As variáveis básicas assumem os valores dos termos independentes das restrições. **M** é um valor infinito, que penaliza as variáveis artificiais positiva ou negativamente, conforme a otimização seja, respetivamente, de minimização ou maximização. Se uma variável artificial deixar de ser básica, nunca mais o voltará a ser. O problema é se não consegue que ela deixe a

Base. Assim, nem toda a solução na forma aumentada é solução da forma geral, visto as variáveis artificiais não terem significado económico. Só quando estas são nulas, teremos uma solução da forma geral.

## Inconsistência e Redundância

No fim da resolução pela forma aumentada, saber se a solução é a da forma geral depende:

- das variáveis artificiais serem todas não básicas, logo a solução existe e é a básica ótima admissível da forma geral ou da padrão;
- não conseguindo isso e se existir no fim pelo menos uma variável artificial básica, então poderá ser  $\geq 0$ :
  - se for nula, então a solução é degenerada. Podemos estar em presença de uma **solução redundante** se a linha do quadro Simplex correspondente a essa variável for uma linha de zeros. Há pois repetição de informação;
  - se for positiva, então obtém-se uma solução sem qualquer significado, logo não é solução básica ótima admissível da forma geral. Pode não existir essa solução, existindo **inconsistência** se a linha correspondente a essa variável artificial for uma linha de zeros. Se não o for, então poderá existir solução, mas não é admissível, visto não cumprir a restrição de não negatividade.

## Solução pelo Método do Grande M

**Exemplo:**

Forma geral:  $\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2$

$$0,5x_1 + x_2 \leq 7,5$$

$$2x_1 + x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma aumentada:  $\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1$

$$0,5x_1 + x_2 + s_1 = 7,5$$

$$2x_1 + x_2 - s_2 + a_1 = 15$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, a_1 \geq 0$$

Determinação dos valores para a linha zero do quadro Simplex:

$$\text{Mín } Z = -x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1$$

$$\text{Mín } Z = -\text{Máx } (-Z)$$

$$\text{Máx } (-Z) = x_1 + 1,5x_2 - 0s_1 - 0s_2 - Ma_1$$

$$-Z - x_1 - 1,5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 = 0$$

Quadro inicial A

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	b
<b>-Z</b>	-1	-1,5	0	0	<b>M</b>	<b>0</b>
$s_1$	0,5	1	1	0	0	7,5
$a_1$	2	1	0	-1	1	15

Começa-se por anular o coeficiente **M** das variáveis artificiais na linha zero, que deverá ser nulo para que possam ser usadas, inicialmente, como variáveis básicas.

Multiplicar a linha 2 por **-M** e somar à linha 0  $\equiv -ML_2 + L_0$

Quadro inicial B

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	b
<b>-Z</b>	<b>-1 - 2M</b>	<b>-1,5 - M</b>	0	M	0	<b>-15M</b>
$s_1$	0,5	1	1	0	0	7,5
$a_1$	2	1	0	-1	1	15

Critério de otimalidade: a solução não é ótima pois temos valores negativos na linha zero.

#### Iteração 1:

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é **(-1-2M)**, logo  $x_1$  vai entrar para a Base.

Critério de saída: divide-se os  $b_i$  por  $a_{ij}$ , com estes positivos, e escolhe-se o menor valor dos rácios.

Mín  $\{7,5/0,5 = 15 ; 15/2 = 7,5\} = 7,5 \Rightarrow$  Sai  $a_1$  e o valor pivô = 2.

Condensação Gaussiana:  $L_2 / 2 = L^*_2$  ;  $-0,5 L^*_2 + L_1$  ;  $(1 + 2M) L^*_2 + L_0$

**Quadro 1**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	<b>b</b>
<b>-Z</b>	0	-1	0	-0,5	$0,5 + M$	<b>7,5</b>
$s_1$	0	0,75	1	0,25	-0,25	3,75
$x_1$	1	0,5	0	-0,5	0,5	7,5

Critério de otimalidade: a solução continua a não ser ótima pois temos ainda valores negativos na linha zero.

**Iteração 2:**

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é -1, logo  $x_2$  vai entrar para a Base.

Critério de saída:  $\text{Mín} \{3,75/0,75 = 5 ; 7,5/0,5 = 15\} = 5 \Rightarrow$  Sai  $s_1$  e o valor pivô = 0,75

Condensação Gaussiana:  $L_1 / 0,75 = L^*_1$  ;  $L^*_1 + L_0$  ;  $-0,5 L^*_1 + L_2$

**Quadro 2**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	<b>b</b>
<b>-Z</b>	0	0	$4/3$	$-1/6$	$1/6 + M$	<b>12,5</b>
$x_2$	0	1	$4/3$	$1/3$	$-1/3$	5
$x_1$	1	0	$-2/3$	$-2/3$	$2/3$	5

Critério de otimalidade: a solução continua a não ser ótima pois temos ainda valores negativos na linha zero.

**Iteração 3:**

Critério de entrada: o valor negativo mais baixo é  $-1/6$ , logo  $s_2$  vai entrar para a Base.

Critério de saída:  $\text{Mín} \{5/0,33 = 15\} = 15 \Rightarrow$  Sai  $x_2$  e valor pivô =  $1/3$

Condensação Gaussiana:  $L_1 / 1/3 = L^*_1$  ;  $1/6 L^*_1 + L_0$  ;  $2/3 L^*_1 + L_2$

Quadro 3

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	b
-Z	0	0,5	2	0	M	15
$s_2$	0	3	4	1	-1	15
$x_1$	1	2	2	0	0	15

Critério de otimalidade: todos os coeficientes da linha zero são agora positivos ou nulos, pelo que a solução ótima foi alcançada.

As variáveis básicas são  $x_1 = 15$  e  $s_2 = 15$

As variáveis não básicas são sempre nulas, logo  $x_2$  e  $s_1 = 0$

O valor da função objetivo será o simétrico:  $Z = -15$

## Solução pelo Método das Duas Fases

Este método implica a criação de um Z artificial ( $Z_a$ ) para nos ajudar a eliminar as variáveis artificiais.

A função objetivo será obtida por somatório de todas as restrições que tenham variáveis artificiais, mas não as incluindo. Isto é, somam-se todas as variáveis artificiais. No exemplo, visto atrás, só existe uma restrição com variável artificial:

$$2x_1 + x_2 - s_2 + a_1 = 15$$

então o Z artificial será:  $Z_a \equiv a_1 = 15 - 2x_1 - x_2 + s_2$

$$Z_a + 2x_1 + x_2 - s_2 = 15$$

e porque se trata de uma minimização:  $-Z_a - 2x_1 - 1x_2 + 1s_2 = -15$

Quadro inicial

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	b
$-Z_a$	-2	-1	0	1	0	-15
-Z	-1	-1,5	0	0	0	0
$s_1$	0,5	1	1	0	0	7,5
$a_1$	2	1	0	-1	1	15



**Iteração 1:**

Entra  $x_1$  (-2) e sai  $a_1$  [ $\min(7,5/0,5 = 15 ; 15/2 = 7,5) = 7,5$ ]. O pivô = 2.

$$L_2 / 2 = L^*_2; \quad 2 L^*_2 + Z_a; \quad L^*_2 + L_0; \quad -0,5 L^*_2 + L_1$$

**Quadro 1 A**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	b
<b>-Z<sub>a</sub></b>	0	0	0	0	1	<b>0</b>
<b>-Z</b>	0	-1	0	-0,5	0,5	<b>7,5</b>
$s_1$	0	0,75	1	0,25	-0,25	3,75
$x_1$	1	0,5	0	-0,5	0,5	7,5

A variável artificial já saiu da base e **-Z<sub>a</sub> = 0**

Resolvemos agora a minimização do problema real, prescindindo da linha **-Z<sub>a</sub>** e das colunas das variáveis artificiais, no caso  $a_1$ .

**Quadro 1 B**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
<b>-Z</b>	0	-1	0	-0,5	<b>7,5</b>
$s_1$	0	0,75	1	0,25	3,75
$x_1$	1	0,5	0	-0,5	7,5

**Iteração 2:**

Entra  $x_2$  (-1). Sai  $s_1$  [ $\min(3,75/0,75 = 5 ; 7,5/0,5 = 15) = 5$ ]. O pivô = 0,75.

$$L_1 / 0,75 = L^*_1; \quad -0,5 L^*_1 + L_3; \quad L^*_1 + L_0$$

**Quadro 2**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
<b>-Z</b>	0	0	4/3	-1/6	<b>12,5</b>
$x_2$	0	1	4/3	1/3	5
$x_1$	1	0	-2/3	-2/3	5

**Iteração 3:**

Entra  $s_2$  (-1/6). Sai  $x_2$  [min (5/0,33 = 15). O pivô = 1/3.

$$L_1 / 1/3 = L^*_1 \quad ; \quad 2/3 L^*_1 + L_3 \quad ; \quad 1/6 L^*_1 + L_0$$

**Quadro 3**

Base	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	b
<b>-Z</b>	0	0,5	2	0	<b>15</b>
$s_2$	0	3	4	1	15
$x_1$	1	2	2	0	15

**Solução ótima:** as variáveis básicas são  $x_1 = 15$  e  $s_2 = 15$

As variáveis não básicas são  $x_2$  e  $s_1 = 0$

O valor da função objetivo será o simétrico: **Z = -15**

**Exercício**

**Forma geral:**

$$\text{Mín } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Forma aumentada:**

$$\text{Mín } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + a_1 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - s_2 + a_2 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$$

**Quadro inicial A**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
<b>-Z</b>	2	4	1	0	0	<b>M</b>	<b>M</b>	<b>0</b>
$s_1$	1	2	-1	1	0	0	0	5
$a_1$	2	-1	2	0	0	1	0	2
$a_2$	-1	2	2	0	-1	0	1	1

**Método do grande M:**

Multiplicar a linha 2 por -M e somar à linha 0  $\equiv -ML_2 + L_0$

Multiplicar a linha 3 por -M e somar à linha 0  $\equiv -ML_3 + L_0$

Pode-se fazer as duas operações em simultâneo:  $-ML_2 - ML_3 + L_0$

**Quadro inicial B**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
<b>-Z</b>	$2 - M$	$4 - M$	$1 - 4M$	0	M	0	0	<b>-3M</b>
$s_1$	1	2	-1	1	0	0	0	5
$a_1$	2	-1	2	0	0	1	0	2
$a_2$	-1	2	2	0	-1	0	1	1

**Iteração 1:**

Entra  $x_3$  ( $1 - 4M$ ). Sai  $a_2$  [ $\min(2/2 = 1; 1/2 = 0,5) = 0,5$ ]. Pivô = 2.

$$L_3 / 2 = L^*_3; \quad -2 L^*_3 + L_2; \quad L^*_3 + L_1; \quad (4M - 1) L^*_3 + L_0$$

**Quadro 1**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
<b>-Z</b>	$2,5 - 3M$	$3 - 3M$	0	0	$0,5 - M$	0	$2M - 0,5$	<b><math>-0,5 - M</math></b>
$s_1$	0,5	3	0	1	-0,5	0	0,5	5,5
$a_1$	3	-3	0	0	1	1	-1	1
$x_3$	-0,5	1	1	0	-0,5	0	0,5	0,5

**Iteração 2:**

Entra  $x_1$  ( $2,5 - 3M$ ). Sai  $a_1$  [ $\min(5,5/0,5 = 11; 1/3 = 0,33) = 0,33$ ]. Pivô = 3

$$L_2 / 3 = L^*_2; \quad (3M - 2,5) L^*_2 + L_0; \quad -0,5 L^*_2 + L_1; \quad 0,5 L^*_2 + L_3$$

Quadro 2

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
<b>-Z</b>	0	5,5	0	0	-1/3	$M - 5/6$	$M + 1/3$	<b>-4/3</b>
$s_1$	0	3,5	0	1	-2/3	-1/6	2/3	5,33
$x_1$	1	-1	0	0	1/3	1/3	-1/3	1/3
$x_3$	0	0,5	1	0	-1/3	1/6	1/3	2/3

**Iteração 3:**

Entra  $s_2$  (-1/3). Sai  $x_1$  [ $\min(0,33/0,33 = 1) = 1$ ]. Pivô = 1/3

$$L_2 + L_0 ; \quad L_2 + L_3 ; \quad 2L_2 + L_1 ; \quad L_2 / 1/3$$

Quadro 3

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
<b>-Z</b>	1	4,5	0	0	0	$M - 0,5$	M	<b>-1</b>
$s_1$	2	1,5	0	1	0	0,5	0	6
$s_2$	3	-3	0	0	1	1	-1	1
$x_3$	1	-0,5	1	0	0	0,5	0	1

**Solução ótima:**  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 0$  ;  $x_3 = 1$  ;  $s_1 = 6$  ;  $s_2 = 1$  ;  $Z = 1$

**Método das duas fases:**

Restrições com variáveis artificiais:

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + a_1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 2 - 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - s_2 + a_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = 1 + x_1 - 2x_2 - 2x_3 + s_2$$

Adicionam-se para obter a função objetivo artificial:  $Z_a = 3 - x_1 - x_2 - 4x_3 + s_2$

Preparação da linha **-Z<sub>a</sub>** adicional:  $Z_a + x_1 + x_2 + 4x_3 - s_2 = 3$

Como se trata de uma minimização, converte-se:  $-Z_a - x_1 - x_2 - 4x_3 + s_2 = -3$

Quadro inicial

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
$-Z_a$	-1	-1	-4	0	1	0	0	-3
$-Z$	2	4	1	0	0	0	0	0
$s_1$	1	2	-1	1	0	0	0	5
$a_1$	2	-1	2	0	0	1	0	2
$a_2$	-1	2	2	0	-1	0	1	1

Iteração 1:

Entra  $x_3$  (-4). Sai  $a_2$  [ $\min(1/2 = 0,5 ; 2/2 = 1) = 1/2$ ]. Pivô = 2

$$L_3 / 2 = L^*_3 ; \quad -2 L^*_3 + L_2 ; \quad L^*_3 + L_1 ; \quad -L^*_3 + L_0 ; \quad 4 L^*_3 + Z_a$$

Quadro 1

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
$-Z_a$	-3	3	0	0	-1	0	2	-1
$-Z$	2,5	3	0	0	0,5	0	-0,5	-0,5
$s_1$	0,5	3	0	1	-0,5	0	0,5	5,5
$a_1$	3	-3	0	0	1	1	-1	1
$x_3$	-0,5	1	1	0	-0,5	0	0,5	0,5

Iteração 2:

Entra  $x_1$  (-3). Sai  $a_1$  [ $\min(5,5/0,5 = 11 ; 1/3 = 0,33) = 0,33$ ]. Pivô = 3

$$L_2 / 3 = L^*_2 ; \quad 0,5L^*_2 + L_3 ; \quad -0,5L^*_2 + L_1 ; \quad -2,5 L^*_2 + L_0 ; \quad 3 L^*_2 + Z_a$$

Quadro 2A

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$a_1$	$a_2$	b
$-Z_a$	0	0	0	0	0	1	1	0
$-Z$	0	5,5	0	0	-1/3	-5/6	1/3	-4/3
$s_1$	0	3,5	0	1	-2/3	-1/6	2/3	5,33
$x_1$	1	-1	0	0	1/3	1/3	-1/3	1/3
$x_3$	0	0,5	1	0	-1/3	1/6	1/3	2/3

As variáveis artificiais já saíram da base e  $Z_a = 0$ , então podemos prescindir destas variáveis e da linha artificial.

Quadro 2B

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
-Z	0	5,5	0	0	-1/3	-4/3
$s_1$	0	3,5	0	1	-2/3	5,33
$x_1$	1	-1	0	0	1/3	1/3
$x_3$	0	0,5	1	0	-1/3	2/3

**Iteração 3:**

Entra  $s_2$  (-1/3). Sai  $x_1$  [ $\min(0,33/0,33 = 1) = 1$ ]. Pivô = 1/3

$$L_2 + L_0 \quad ; \quad L_2 + L_3 \quad ; \quad 2L_2 + L_1 \quad ; \quad L_2 / 1/3$$

Quadro 3

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
-Z	1	4,5	0	0	0	-1
$s_1$	2	1,5	0	1	0	6
$s_2$	3	-3	0	0	1	1
$x_3$	1	-0,5	1	0	0	1

**Solução ótima:**  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 0$  ;  $x_3 = 1$  ;  $s_1 = 6$  ;  $s_2 = 1$  ;  $Z = 1$

## Algoritmo Simplex para Variáveis Limitadas

Podem existir limites às variáveis, tanto a nível superior como inferior, que até podem ser negativos. No caso dum limite inferior, para não complicar demasiado o algoritmo, pois teríamos mais uma restrição com a respetiva variável de folga artificial, podemos usar a condição de não negatividade, substituindo a condição inicial ( $x \geq k$ ) por  $x' = x - k$ . A não negatividade de  $x'$  implica a restrição inicial.

**Exemplo:**

$$x \geq 4 \Rightarrow x' = x - 4 \geq 0 \Rightarrow x = x' + 4$$

As alterações no algoritmo Simplex dizem, assim, respeito apenas aos limites superiores das variáveis ( $x \leq k$ ), englobando o critério de otimalidade e os incrementos máximos que é possível atribuir a cada variável. O critério de otimalidade de uma solução

consiste em ter coeficientes não negativos na função objetivo, expressa em termos das variáveis não básicas. Agora pode acontecer que uma variável não básica tenha um valor diferente de zero e igual ao seu limite superior, e um coeficiente positivo na função objetivo. Neste caso é necessário considerar um incremento negativo no valor desta variável. Assim, uma solução ótima caracteriza-se por ter as variáveis não básicas de valor igual aos seus limites inferiores com coeficientes positivos na função objetivo, e as variáveis não básicas de valor igual aos seus limites superiores com coeficientes negativos na função objetivo. Para escolher a variável de saída, utiliza-se a regra da escolha do menor valor positivo no quociente entre os termos independentes e os coeficientes da variável nas respetivas restrições, mas para garantir que nenhuma variável básica vai ultrapassar o seu limite superior é necessário calcular também o mínimo dos quocientes com as situações em que  $a_{ij}$  é negativo, positivando-o.

Se o incremento de uma variável não básica conduzir à anulação de uma variável básica, procede-se a uma iteração habitual do Simplex. Contudo, pode acontecer que quando uma variável não básica é incrementada, uma variável básica atinja o seu limite superior. Neste caso, não há propriamente a troca de uma variável básica por outra, mas apenas uma atualização dos valores das variáveis. Para garantir que a solução se mantém como básica é necessário fazer uma substituição de variável:

$$x^+ = L_s - x \Leftrightarrow x = L_s - x^+$$

**Exemplo:**

$$x \leq 4 \Rightarrow x^+ = 4 - x \Rightarrow x = 4 - x^+$$

Quando uma variável não básica e, portanto, nula, é incrementada até ao seu valor máximo sem que nenhuma variável básica se anule, então fica-se com um número de variáveis não nulas superior ao desejável. Tirando partido do facto da variável de folga, relativa à restrição do limite superior, se anular, pode manter-se o número conveniente de variáveis nulas, bastando para isso fazer a substituição indicada atrás. Consegue-se, desta forma, que o número de variáveis não nulas se mantenha constante e que as variáveis não básicas tenham sempre valores nulos, embora possam corresponder a valores positivos das variáveis originais do problema.

**Exemplo:**

$$\text{Mín } Z = -2x_1 - x_2 + 2$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$$

$$-7x_1 - 2x_2 + x_5 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_6 = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$2 \leq x_2 \leq 10 \Rightarrow x'_2 = x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$0 \leq x_3 \leq 15$$

$$0 \leq x_4 \leq 15$$

$$0 \leq x_5 \leq 15$$

$$0 \leq x_6 \leq 5$$

$$\text{Mín } Z = -2x_1 - x'_2$$

$$4x_1 + x'_2 + x_3 = 15$$

$$6x_1 + 2x'_2 + x_4 = 8$$

$$-7x_1 - 2x'_2 + x_5 = 4$$

$$-x_1 - x'_2 + x_6 = 2$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x'_2 \leq 8$$

$$0 \leq x_3 \leq 15$$

$$0 \leq x_4 \leq 15$$

$$0 \leq x_5 \leq 15$$

$$0 \leq x_6 \leq 5$$

Só há uma restrição de limite inferior, logo substitui-se:  $x'_2 = x_2 - 2$ , a qual deverá ser feita em todos os  $x_2$ . Todas as variáveis têm limites superiores, então inclui-se uma linha no quadro com esses valores. Notar que temos a matriz identidade nas restrições, logo não precisamos de variáveis artificiais.

Quadro inicial A

Base	$x_1$	$x'_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
-Z	-2	-1	0	0	0	0	0
$x_3$	4	1	1	0	0	0	15
$x_4$	6	2	0	1	0	0	8
$x_5$	-7	-2	0	0	1	0	4
$x_6$	-1	-1	0	0	0	1	2
$L_5$	1	8	15	15	15	5	

A variável não básica que vai entrar é  $x_1$ .

Para que a primeira restrição não deixe de ser satisfeita,  $x_1$  não pode ser incrementado de mais do 3,75 (15/4). No caso da segunda restrição, não pode ser incrementado de mais de 4/3 (8/6). As terceira e quarta restrições apresentam  $a_{ij}$  negativos, o que quereria dizer que não haveria qualquer limite ao incremento de  $x_1$ , pois seria compensado pelo incremento de  $x_5$  e  $x_6$ . Porém, neste caso, o valor de  $x_5$  – que é atualmente de 4 – não pode ultrapassar as 15



unidades, e  $x_6$  – que é atualmente de 2 – não pode ultrapassar as 5 unidades. Assim, devemos

fazer na mesma o quociente com o seguinte algoritmo:  $\frac{L_s - b}{-a_{ij}}$

**Quocientes:**  $\frac{15}{4} = 3,75$  ;  $\frac{8}{6} = 4/3$  ;  $\frac{15-4}{7} = 1,57$  ;  $\frac{5-2}{1} = 3$

O maior valor que pode ser atribuído à variável  $x_1$ , sem violar o seu limite superior, é 1. Então, escolhe-se o valor mínimo entre  $\{3,75 ; 4/3 ; 1,57 ; 3 ; 1\} = 1$

Com este incremento,  $x_3$  e  $x_4$  não são anulados, e  $x_5$  e  $x_6$  não atingem os seus limites superiores. Este facto significa que nenhuma variável deixa de ser básica apesar de o valor de  $x_1$  ser incrementado para o seu limite superior. Para manter o mesmo número de variáveis,  $x_1$  é substituída pela sua variável de folga, de acordo com a expressão já vista atrás:

$$x_1^+ = 1 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_1^+$$

Fazendo esta substituição em todas as expressões, obtemos:

Min $Z = -2x_1 - x'_2 = 0$	no 1º quadro
Min $Z = -2(1 - x_1^+) - x'_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1^+ - x'_2 = 2$	no 2º quadro
$4x_1 + x'_2 + x_3 = 15$	$-4x_1^+ + x'_2 + x_3 = 11$
$6x_1 + 2x'_2 + x_4 = 8$	$-6x_1^+ + 2x'_2 + x_4 = 2$
$-7x_1 - 2x'_2 + x_5 = 4$	$7x_1^+ - 2x'_2 + x_5 = 11$
$-x_1 - x'_2 + x_6 = 2$	$x_1^+ - x'_2 + x_6 = 3$
$0 \leq x_1 \leq 1$	$0 \leq x_1^+ \leq 1$

**Quadro inicial B**

Base	$x_1^+$	$x'_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
-Z	2	-1	0	0	0	0	2
$x_3$	-4	1	1	0	0	0	11
$x_4$	-6	2	0	1	0	0	2
$x_5$	7	-2	0	0	1	0	11
$x_6$	1	-1	0	0	0	1	3
$L_s$	1	8	15	15	15	5	

**Iteração 1:**

$$\frac{11}{1} = 11; \frac{2}{2} = 1; \frac{15-11}{2} = 2; \frac{5-3}{1} = 2$$

Entra  $x'_2$  (-1). Quocientes:

O limite máximo é de 8 para  $x'_2$ .

Escolhe-se o mínimo de  $\{11; 1; 2; 2; 8\} = 1$ . Sai  $x_4$ . O pivô = 2

**Quadro 1A**

Base	$x^+_1$	$x'_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	b
-Z	-1	0	0	0,5	0	0	3
$x_3$	-1	0	1	-0,5	0	0	10
$x'_2$	-3	1	0	0,5	0	0	1
$x_5$	1	0	0	1	1	0	13
$x_6$	-2	0	0	0,5	0	1	4
$L_5$	1	8	15	15	15	5	

### Iteração 2:

Agora será  $x^+_1$  a ser incrementada, entrando, a que corresponde de facto a diminuir o valor de  $x_1$ .

Quocientes:  $\frac{15-10}{1} = 5; \frac{8-1}{3} = 2,66; \frac{13}{1} = 13; \frac{5-4}{2} = 0,5$

O limite máximo é de 1 para  $x^+_1$ .

Temos de escolher entre o mínimo de  $\{5; 2,66; 13; 0,5; 1\} = 0,5$ .

Logo, podemos retirar  $x_6$ . Contudo, o pivô seria negativo ou o valor do termo independente. Assim, para manter o mesmo número de variáveis na base, faz-se a substituição da  $x_6$  pela sua variável de folga:

$$x^+_6 = 5 - x_6 \Leftrightarrow x_6 = 5 - x^+_6$$

$$-2x^+_1 + 0,5x_4 + x_6 = 4$$

$$-2x^+_1 + 0,5x_4 - x^+_6 = -1$$

$$2x^+_1 - 0,5x_4 + x^+_6 = 1$$

**Quadro 1B**

Base	$x_1^+$	$x_2^+$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6^+$	b
<b>-Z</b>	-1	0	0	0,5	0	0	<b>3</b>
$x_3$	-1	0	1	-0,5	0	0	10
$x_2^+$	-3	1	0	0,5	0	0	1
$x_5$	1	0	0	1	1	0	13
$x_6^+$	2	0	0	-0,5	0	1	1
<b>L<sub>5</sub></b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>5</b>	

Os quocientes são agora:  $\frac{15-10}{1} = 5$ ;  $\frac{8-1}{3} = 2,66$ ;  $\frac{13}{1} = 13$ ;  $\frac{1}{2} = 0,5$

O pivô será 2.

Quadro 2

Base	$x_1^+$	$x_2^+$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6^+$	b
<b>-Z</b>	0	0	0	0,25	0	0,25	<b>3,5</b>
$x_3$	0	0	1	-0,75	0	0,5	10,5
$x_2^+$	0	1	0	-0,25	0	1,5	2,5
$x_5$	0	0	0	1,25	1	-0,5	12,5
$x_1^+$	1	0	0	-0,25	0	0,5	0,5
<b>L<sub>5</sub></b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>5</b>	

Foi alcançada a solução ótima, com **Z = -3,5**. É necessário calcular agora o valor das variáveis originais do problema, procedendo à inversão das substituições efetuadas:

$$x_1 = 1 - x_1^+ = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$x_2 = 2,5 - 2 = 0,5$$

$$x_3 = 10,5$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 12,5$$

$$x_6 = 5 - x_6^+ = 5 - 0 = 5$$

$$Z = -2 \times 0,5 - 0,5 - 2 = -3,5$$

Assim, consideraram-se os limites como restrições implícitas nesta metodologia.

## Violação das Regras Canônicas

No caso de variáveis livres, que representam situações em que as variáveis podem assumir valores negativos (ex: temperaturas, altura em relação ao nível médio do mar, rendimentos de uma aplicação financeira com risco, ou nível de stocks dum produto), então há que transformar a variável sem alterar as premissas do problema ou perder informação relevante para a eficácia da sua resolução.

Define-se a variável como a diferença entre duas variáveis positivas ou nulas, que verificam a regra canónica da não negatividade. No fim será interpretada como sendo a diferença dos valores ótimos encontrados para as duas novas variáveis:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^- \quad (\text{com estas positivas})$$

Assim, na solução ótima, três alternativas podem acontecer:

$$\text{se } x_1^+ > x_1^- \Rightarrow x_1 > 0$$

$$\text{se } x_1^+ = x_1^- \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{se } x_1^+ < x_1^- \Rightarrow x_1 < 0$$

No caso dos termos independentes serem negativos, então multiplicam-se as restrições por -1.

## Dualidade

O problema primal poderá ser a análise do misto ótimo de produtos a fabricar (outputs), enquanto o problema dual diz respeito à análise dos inputs, isto é, dos recursos utilizados para essa solução.

- Como poderemos valorizar os recursos, dado que já sabemos como estes vão ser utilizados no misto ótimo de produção?

- Como poderemos avaliar o preço de mercado, justo ou de equilíbrio, para esses recursos?

- Qual o benefício que a empresa teria com a disponibilização de mais uma unidade de cada um dos recursos escassos de que dispõe?

- Qual o benefício que a empresa teria com a produção de mais uma unidade de produto, para além da quantidade ótima apurada?

Todo o problema de PL admite a existência do respetivo dual, que é ainda um problema de PL com o seu dual respetivo. E o dual do dual é o próprio primal.

**Forma canónica:** o problema está nesta forma quando for de maximização e tiver todas as restrições como inequações do tipo  $\leq$ . Se for de minimização, estará na forma canónica se todas as restrições forem inequações do tipo  $\geq$ .

Se o primal for de maximização, o dual é de minimização e vice-versa.

Se o primal tiver  $r$  variáveis e  $s$  restrições, o dual respetivo terá  $r$  restrições e  $s$  variáveis.

O vetor dos coeficientes das variáveis dual é o transposto do vetor dos termos independentes das restrições do primal. O vetor dos coeficientes da função objetivo do dual é o transposto do vetor dos coeficientes do primal. A matriz de coeficientes  $A'$  das variáveis nas restrições do dual é a transposta da mesma matriz no primal.

#### Exemplo Primal:

$$\text{Máx } Z = 4x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

#### Dual:

$$\text{Mín } Z^* = 10w_1 + 15w_2$$

$$2w_1 + 4w_2 \geq 4$$

$$3w_1 + w_2 \geq 7$$

$$4w_1 + 6w_2 \geq 5$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Assim, os termos independentes no dual são os coeficientes da função objetivo no primal. Os coeficientes das variáveis do dual na função objetivo são os termos independentes das restrições do primal. Os coeficientes das variáveis nas restrições do dual são os coeficientes das restrições do primal na forma transposta.

#### As variáveis duais $w_i$ representam:

- o ganho obtido com a utilização de mais uma unidade do recurso  $i$ ;
- o custo de oportunidade da utilização de mais uma unidade do recurso  $i$ , isto é aquilo que se perde por não utilizar uma unidade adicional desse recurso, para além da quantidade existente e utilizada;
- o lucro adicional, que se consegue obter com o aumento de uma unidade do recurso  $i$ , a que também se dá o nome de **valor incremental, lucro marginal ou preço sombra do recurso**.

**Significado das restrições no dual:** *custos marginais* das atividades, ou valor dos recursos utilizados numa unidade adicional produzida.

**No exemplo:**

- atividade  $x_1$  tem um Cmg inicial =  $2w_1 + 4w_2$
- atividade  $x_2$  tem um Cmg inicial =  $3w_1 + w_2$
- atividade  $x_3$  tem um Cmg inicial =  $4w_1 + 6w_2$

**Resolução do primal:**

$$\text{Máx } Z - 4x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 0s_1 - 0s_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + s_1 = 10$$

$$4x_1 + x_2 + 6x_3 + s_2 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

**Quadro inicial**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0
$s_1$	2	3	4	1	0	10
$s_2$	4	1	6	0	1	15

**Iteração 1:**

Entra  $x_2$  (-7). Sai  $s_1$   $\min \{10/3 = 3,33 ; 15/1 = 15\} = 3,33$ . O pivô = 3

$$L_1 / 3 ; -L_1 + L_2 ; 7L_1 + L_0$$

**Quadro 1**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	$ws_1 = 2/3$	$ws_2 = 0$	$ws_3 = 13/3$	$w_1 = 7/3$	$w_2 = 0$	$70/3$
$x_2$	$2/3$	1	$4/3$	$1/3$	0	$10/3$
$s_2$	$10/3$	0	$14/3$	$-1/3$	1	$35/3$

**Solução ótima:**  $Z = 70/3$

$$x_2 = 10/3 ; s_2 = 35/3 ; \text{ Outras variáveis não básicas} = 0$$

As variáveis de decisão duais  $w_i$  correspondem aos **preços sombra** dos recursos (ou inputs).

As variáveis auxiliares duais  $ws_i$  correspondem aos custos reduzidos ( $C_{mg} - R_{mg}$ ) dos produtos (ou outputs).

Isto é, podemos ver a solução ótima do dual no quadro primal.

#### Análise do quadro Simplex:

- Se aumentarmos em uma unidade a produção de  $x_1$ ,  $Z$  diminuirá  $2/3$ , daí não ser racional que se produza  $x_1$ .

- Se aumentarmos em uma unidade a produção de  $x_3$ ,  $Z$  diminuirá  $13/3$ , daí não ser racional que se produza  $x_3$ .

$c_j$  = custo reduzido da atividade  $j$  (valor na linha zero do quadro final)

$c_j^0$  = rendimento marginal da atividade  $j$  (valor na linha zero do quadro inicial)

#### No exemplo:

$$c_1 = C_{mg1} - R_{mg1} = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 - c_1^0 = 2 \times 7/3 + 4 \times 0 - 4 = \mathbf{2/3}$$

$$c_2 = C_{mg2} - R_{mg2} = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 - c_2^0 = 3 \times 7/3 + 1 \times 0 - 7 = \mathbf{0}$$

$$c_3 = C_{mg3} - R_{mg3} = a_{13} w_1 + a_{23} w_2 - c_3^0 = 4 \times 7/3 + 6 \times 0 - 5 = \mathbf{13/3}$$

Os recursos não estão a ser totalmente utilizados, porque há uma variável auxiliar que não é nula ( $s_2$ ) e que ficou na base, o que significa que não se usa parte do recurso B, sendo então o seu valor marginal (preço sombra) nulo ( $w_2 = 0$ ).

A folga em B (=  $35/3$ ) significa que só estão a ser utilizados  $15 - 35/3 = 10/3$  do recurso B.

Se aumentarmos em uma unidade a folga do recurso A (1ª restrição),  $s_1$ ,  $Z$  diminuirá  $7/3$ . Isto é, se se utilizar menos uma unidade do recurso A (equivalente a aumentar a folga), então  $Z$  diminuirá.

Sendo assim, podemos procurar visualizar variações marginais contrárias, que terão um impacto simétrico na função objetivo, afirmando que se se utilizar mais uma unidade do recurso A, então  $Z$  aumentará  $7/3$ .

Podemos também concluir para o critério de otimalidade, que a empresa só atinge uma solução de misto de produção ótima quando o valor dos seus recursos (coeficientes das variáveis de folga) for  $\geq 0$ .

Quando os coeficientes da função objetivo são nulos na solução ótima, as variáveis correspondentes são básicas.

Quando eles são positivos ou negativos, significa que as variáveis correspondentes são nulas.

Existe sempre esta relação complementar, ou os coeficientes são nulos ou as variáveis correspondentes são nulas.

Os recursos terão valor marginal nulo ( $w_i = 0$ ) quando existir folga para essa solução, isto é, quando estes recursos não estiverem a ser utilizados na sua totalidade no misto de produção ótimo (caso do recurso B no exemplo).

Os recursos terão valor marginal positivo ( $w_i > 0$ ) quando não existir folga (a variável correspondente é não básica, o recurso é todo utilizado). Se adquirirmos mais deste recurso, podemos aumentar a produção com ganho adicional, no limite igual ao custo de aquisição da unidade adicional de recurso, sendo pois indiferentes as soluções.

No caso do valor marginal ser negativo ( $w_i < 0$ ), isto significa que ainda não se atingiu a solução ótima.

Então, na ótica dual podemos multiplicar a quantidade dos recursos disponíveis pelo seu valor marginal e obteremos assim o valor da produção:

$$\text{Mín } Z^* = 10w_1 + 15w_2 \Rightarrow 10 \times 7/3 + 15 \times 0 = 70/3$$

Assim, pode-se repartir os ganhos da empresa pelos seus recursos, criando um sistema de valorização dos seus inputs. Isto é, podemos afirmar que os recursos valem exatamente o valor que nos podem proporcionar, adicionalmente.

Para cumprir a condição de otimalidade (todos os coeficientes da função objetivo  $\geq 0$ ) então a receita marginal de cada atividade deve ser menor ou igual ao seu custo marginal.

Isto é, paramos a busca de um solução ótima quando a receita passar a ser inferior ao seu custo se houver uma variação infinitesimal.

$$\text{No exemplo, quando: } 2w_1 + 4w_2 \geq 4 \quad ; \quad 3w_1 + w_2 \geq 7 \quad ; \quad 4w_1 + 6w_2 \geq 5$$



Então, quando estamos a produzir um produto na solução ótima, o seu custo reduzido será nulo, porque as receitas e os custos marginais de produção de uma unidade adicional se igualam.

A ótica dual de um problema de produção traduz um outro problema cujo objetivo é a minimização do valor dos recursos utilizados, considerando que já se produz aos níveis ótimos, que maximizam o lucro da empresa.

#### **Lucro ótimo:**

Primal – ótica dos outputs = quantidades de produtos x lucros unitários

$$Z = 4 \times 0 + 7 \times 10/3 + 5 \times 0 = 70/3$$

Dual – ótica dos inputs = quantidades de recursos x lucro marginal

$$Z^* = 10 \times 7/3 + 15 \times 0 = 70/3$$

#### **Propriedades fundamentais da dualidade:**

Relações de complementaridade:

- Na linha da função objetivo, ou as variáveis (de decisão ou desvio) são nulas ou os seus coeficientes (custos reduzidos ou preços sombra) são nulos. Tanto no primal como no dual;
- Se  $X$  é uma solução admissível do primal e  $W$  uma solução admissível do dual, então  $Z \leq Z^*$
- O valor da função objetivo do primal será sempre  $\leq$  que o valor da função objetivo do dual, isto se o primal for de máximo e o dual de mínimo;
- Só se estivermos na presença das soluções ótimas do primal e do dual, é que teremos a igualdade  $Z = Z^*$
- Se um dos problemas tem solução ótima, então o outro também tem solução ótima.

Complementaridade dos desvios:

- Se uma variável de desvio do primal pertence à base ótima ( $s_2$ ), então a variável dual associada a essa restrição ( $w_2$ ) é nula;

- se uma variável principal do primal pertence à base ótima ( $x_2$ ), então a variável de desvio da restrição dual correspondente ( $x_2$ ) é nula.

Podem acontecer 3 resultados:

- ambos os problemas apresentam uma solução ótima possível;
- ambos os problemas são impossíveis;
- um problema é ilimitado e o outro é impossível.

#### Resumo:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
<b>Z</b>	$ws_1 = 2/3$	$ws_2 = 0$	$ws_3 = 13/3$	<b><math>w_1 = 7/3</math></b>	<b><math>w_2 = 0</math></b>	<b><math>70/3</math></b>
$x_2$	$2/3$	1	$4/3$	$1/3$	0	$10/3$
$s_2$	$10/3$	0	$14/3$	$-1/3$	1	$35/3$

- Se uma variável de decisão primal é positiva, então o seu custo reduzido, ou variável de desvio dual, é nulo.
  - $x_2 = 10/3 \Rightarrow ws_2 = 0$
- Se um custo reduzido, ou variável de desvio dual, é não nulo, então a variável de decisão correspondente é nula.
  - $ws_1 = 2/3 \Rightarrow x_1 = 0$  ;  $ws_3 = 13/3 \Rightarrow x_3 = 0$
- Se a variável dual, ou preço sombra de um recurso, não é nula, então a variável de folga desse mesmo recurso é nula, sendo o recurso totalmente utilizado.
  - $w_1 = 7/3 \Rightarrow s_1 = 0$
- Se a variável de desvio de um recurso for positiva, então o seu preço sombra terá de ser necessariamente nulo.
  - $s_2 = 35/3 \Rightarrow w_2 = 0$

## Algoritmo Simplex Dual

No dual passa-se pela otimalidade até chegar à admissibilidade, ao contrário do primal. Um problema de PL pode, assim, ser resolvido a partir de uma solução não possível, que verifique o critério da otimalidade, recorrendo à solução dual possível correspondente e resolvendo o problema dual. É, porém, desnecessário elaborar quadros Simplex para o problema dual. Este problema pode ser resolvido diretamente do quadro do problema primal, dando origem a um algoritmo que se designa por Algoritmo Simplex Dual.

Utiliza-se também em casos de minimização com todas as restrições do tipo  $\geq$ , multiplicando-se as restrições por -1 para ter a base inicial.

A função objetivo do problema dual dá-nos, para um determinado nível de produção ótimo, o valor ótimo dos recursos utilizados.

Os critérios, no Simplex Dual, de mudança de base aplicam-se ao contrário do Simplex Primal:

1º – saída da base: sai a variável com o mais baixo valor negativo na coluna dos termos independentes (**b**).

2º – entrada na base: entra a variável que corresponda ao  $\text{Máx}_j \left\{ \frac{c_j}{a_{rj}}, a_{rj} < 0 \right\}$

**Retomando o último exemplo e resolvendo o problema dual:**

Primal:

$$\text{Máx } Z = 4x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dual:

$$\text{Mín } Z^* = 10w_1 + 15w_2$$

$$2w_1 + 4w_2 \geq 4$$

$$3w_1 + w_2 \geq 7$$

$$4w_1 + 6w_2 \geq 5$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

**Forma aumentada** (multiplicando as restrições por -1):

$$\text{Mín } Z^* = 10w_1 + 15w_2 + 0ws_1 + 0ws_2 + 0ws_3$$

$$\text{Máx } -Z^* = -10w_1 - 15w_2 - 0ws_1 - 0ws_2 - 0ws_3$$

$$-Z^* + 10w_1 + 15w_2 + 0ws_1 + 0ws_2 + 0ws_3$$

$$-2w_1 - 4w_2 + ws_1 = -4$$

$$-3w_1 - w_2 + ws_2 = -7$$

$$-4w_1 - 6w_2 + ws_3 = -5$$

$$w_1, w_2, ws_1, ws_2, ws_3 \geq 0$$

Quadro inicial

Base	$w_1$	$w_2$	$ws_1$	$ws_2$	$ws_3$	b
<b>-Z*</b>	10	15	0	0	0	<b>0</b>
$ws_1$	-2	-4	1	0	0	-4
$ws_2$	-3	-1	0	1	0	-7
$ws_3$	-4	-6	0	0	1	-5

**Iteração 1:**

Sai  $ws_2$  (-7). Entra  $w_1$ :  $\max = \{10/-3 = -3,33 ; 15/-1 = -15\} = -3,33$ . O pivô = -3

$$L_2 / -3 = L^*_2 ; \quad 4 L^*_2 + L_3 ; \quad 2 L^*_2 + L_1 ; \quad -10 L^*_2 + L_0$$

Quadro 1

Base	$w_1$	$w_2$	$ws_1$	$ws_2$	$ws_3$	b
<b>-Z*</b>	$s_1 = 0$	$s_2 = 35/3$	$x_1 = 0$	$x_2 = 10/3$	$x_3 = 0$	<b>-70/3</b>
$ws_1$	0	-10/3	1	-2/3	0	2/3
$w_1$	1	1/3	0	-1/3	0	7/3
$ws_3$	0	-14/3	0	-4/3	1	13/3

**Solução ótima:**      **Mín Z\*** =  $10 \times 7/3 + 15 \times 0 = 70/3$

O valor marginal do recurso B = 0, pois não está a ser completamente utilizado, havendo ainda 35/3 de unidades do recurso B para utilizar ( $w_2 = 0$  porque não está na base).

Linha 0: produz-se 10/3 de  $x_2$  e 0 de  $x_1$  e  $x_3$ .

O recurso A tem um preço sombra  $w_1 = 7/3$ .

## Cálculo Matricial das Soluções Primal e Dual

Utilizando o último exemplo, mostram-se as matrizes no quadro Simplex que precisamos para fazer as análises de pós-otimalidade:

Quadro inicial:

Base	X	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	C <sup>0</sup>	0	0	0
s <sub>1</sub>	A <sup>0</sup>	1	0	B <sup>0</sup>
s <sub>2</sub>		0	1	

Quadro final:

Base	X	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	C	W		70/3
x <sub>2</sub>	A	S		B
s <sub>2</sub>				

Cálculo dos custos reduzidos = Cmg – Rmg

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0$$

Matriz transposta dos custos reduzidos = Matriz transposta dos coeficientes técnicos finais × Matriz transposta dos coeficientes originais das variáveis que estão na Base final – Matriz transposta dos coeficientes originais das variáveis de decisão.

São os simétricos dos coeficientes da função objetivo que são utilizados nas matrizes.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0
s <sub>1</sub>	2	3	4	1	0	10
s <sub>2</sub>	4	1	6	0	1	15

Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
x <sub>2</sub>	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
s <sub>2</sub>	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 10/3 \\ 1 & 0 \\ 4/3 & 14/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 13/3 \end{bmatrix}$$

**Cálculo dos custos reduzidos** = C<sub>mg</sub> – R<sub>mg</sub> (fórmula alternativa)

$$C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0$$

Matriz transposta dos custos reduzidos = Matriz transposta dos coeficientes técnicos originais  
× Matriz transposta dos preços sombra – Matriz transposta dos coeficientes originais das  
variáveis de decisão.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0
s <sub>1</sub>	2	3	4	1	0	10
s <sub>2</sub>	4	1	6	0	1	15

Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	b
Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
x <sub>2</sub>	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
s <sub>2</sub>	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 13/3 \end{bmatrix}$$

**Cálculo dos preços sombra** = valor das variáveis duais

$$W_T = S_T \times C_{BT}^0$$

Matriz transposta dos preços sombra = Matriz transposta dos coeficientes finais abaixo das variáveis auxiliares  $\times$  Matriz transposta dos coeficientes originais das variáveis da Base.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b		Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0		Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
$s_1$	2	3	4	1	0	10		$x_2$	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
$s_2$	4	1	6	0	1	15		$s_2$	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Cálculo dos valores da solução ótima**

$$B = S_{B^0} \times B^0$$

Matriz dos valores da solução ótima = Matriz dos coeficientes finais abaixo das variáveis da base inicial  $\times$  Matriz dos valores da Base inicial.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b		Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0		Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
$s_1$	2	3	4	1	0	10		$x_2$	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
$s_2$	4	1	6	0	1	15		$s_2$	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 35/3 \end{bmatrix}$$

**Cálculo do valor da função objetivo**

Primal:  $Z = C^0 \times X$   $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 0 \end{bmatrix} = 70/3$

Dual:  $Z^* = W \times B^0 \quad [7/3 \ 0] \times \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = 70/3$

Valor da função objetivo primal = Matriz dos coeficientes originais da função objetivo  $\times$  valores das variáveis de decisão.

Valor da função objetivo dual = Matriz dos preços sombra  $\times$  Matriz dos valores da Base inicial.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b	Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0	Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
$s_1$	2	3	4	1	0	10	$x_2$	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
$s_2$	4	1	6	0	1	15	$s_2$	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

**Cálculo dos coeficientes técnicos da solução ótima**

$$A_T = A_T^0 \times S_{B^0 T}$$

Matriz transposta dos coeficientes técnicos finais = Matriz transposta dos coeficientes técnicos originais  $\times$  Matriz transposta dos coeficientes finais abaixo das variáveis da Base inicial.

**Exemplo:**

Quadro inicial:

Quadro final:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b	Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	b
Z	-4	-7	-5	0	0	0	Z	2/3	0	13/3	7/3	0	70/3
$s_1$	2	3	4	1	0	10	$x_2$	2/3	1	4/3	1/3	0	10/3
$s_2$	4	1	6	0	1	15	$s_2$	10/3	0	14/3	-1/3	1	35/3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 10/3 \\ 1 & 0 \\ 4/3 & 14/3 \end{bmatrix}$$



## Análise de Pós-Otimização

Pretende-se testar e controlar o modelo e a solução.

Síntese do procedimento:

- (1) Revisão do modelo: fazer as alterações desejadas.
- (2) Revisão da tabela final: determinar as mudanças na tabela final.
- (3) Conversão para a forma apropriada: condensação gaussiana, se necessário.
- (4) Teste de viabilidade: os valores das variáveis básicas ( $b_i$ ) são  $\geq 0$ ?
- (5) Teste de otimalidade: os coeficientes das variáveis não básicas na linha 0 são  $\geq 0$ ?
- (6) Reotimização: se os testes falharam, continuar as iterações.

## Novas variáveis ou restrições

Há situações em que é necessário tomar decisões quando em presença de uma nova variável ou uma nova restrição.

No caso de uma **nova variável**, se o novo coeficiente na linha zero for positivo, então a solução mantém-se ótima; se for nulo, pode existir um ótimo múltiplo; se for negativo, a solução já não é ótima e tem de se continuar as iterações no Simplex.

No caso de uma **nova restrição**, tem de se verificar se a solução ótima verifica esta nova restrição. Caso contrário, teremos outra linha no quadro Simplex, o que implica uma base maior. A nova variável básica será a auxiliar ou a artificial correspondente a essa nova restrição.

## Análise de Sensibilidade

Trata-se da determinação de intervalos de variação tais que a solução, isto é, o misto de variáveis básicas, se mantenha admissível e ótimo.

Em todas as fórmulas de determinação de um intervalo de sensibilidade, há que colocar a variável de estudo como variável (não colocar o seu valor inicial).

**Coeficientes das variáveis de decisão básicas:**

O coeficiente da função objetivo ( $c^0_j$ ) será a incógnita.

Pretende-se saber para que níveis de produção de  $x_j$  só se produza esse  $x_j$  ou não valha a pena produzir qualquer unidade de  $x_j$ . Serão estes os limites do intervalo de sensibilidade para  $c_j^0$  de uma variável básica. Para isso, as variáveis não básicas (que podem ser variáveis de decisão ou auxiliares) têm de continuar a sê-lo, não podendo ser candidatas a entrar para a base. Quando  $c_j^0$  toma o valor dos limites do intervalo de sensibilidade, a solução ótima será múltipla.

A fórmula que permite descobrir o intervalo de sensibilidade para os coeficientes das variáveis básicas é:

$$CW_T = S_{NBT} \times C_{BT}^0 - C_{NBT}^0 \geq 0$$

#### **Coeficientes das variáveis de decisão não básicas:**

Uma variável de decisão não básica entrará na base se o seu  $Rmg > Cmg$ .

A fórmula para encontrar o intervalo de sensibilidade para os coeficientes de variáveis de decisão não básicas é:

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 \geq 0$$

#### **Termos independentes das restrições:**

Quantidade de recursos disponíveis inicialmente –  $b^0_i$

Para que os recursos totalmente utilizados o continuem a ser, não podemos deixar que haja folgas, o que só acontecerá se entrarem para a base. Portanto, temos que garantir que as variáveis básicas não deixem de o ser. Isto implica que sejam todas  $\geq 0$ .

A fórmula para encontrar o intervalo de sensibilidade para os valores da Base inicial é:

$$B = S_{B^0} \times B^0 \geq 0$$

Quando os termos independentes das restrições assumem os limites dos respetivos intervalos de sensibilidade, a solução ótima consequente será degenerada, correspondendo a um ponto em que uma variável da base original é nula, mas continua na base.

### Coeficientes técnicos:

A alteração de um  $a_{ij}^0$  provoca alterações nos coeficientes técnicos finais, assim como no  $c_j$  associado ao produto ou atividade em questão.

A fórmula para encontrar o intervalo de sensibilidade de qualquer coeficiente técnico inicial é:

$$C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0 \geq 0$$

### Resumo:

Coeficientes das variáveis de decisão básicas:  $c_B^0 \Rightarrow CW \geq 0$

Coeficientes das variáveis de decisão não básicas:  $c_{NB}^0 \Rightarrow C \geq 0$

Termos independentes:  $b_i^0 \Rightarrow B \geq 0$

Coeficientes técnicos duma variável não básica:  $a_{ij}^0 \Rightarrow C \geq 0$  (fórmula com W)

## Análise de Variação

Faz-se para as situações em que  $c_j^0$ ,  $b_i^0$  ou  $a_{ij}^0$  se alteram para valores fora dos intervalos de sensibilidade. Sempre que tenhamos um valor alternativo para estas variáveis, então podemos fazer uma análise de variação. Caso a solução ótima se mantenha, então sabemos que tal valor em estudo estará dentro do intervalo de sensibilidade daquela variável.

$\Delta c_j^0$  básico  $\Rightarrow$  alteração de C ; W ; Z

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 \quad ; \quad W_T = S_T \times C_{BT}^0 \quad ; \quad Z = C^0 \times X$$

$\Delta c_j^0$  não básico  $\Rightarrow$  alteração de C

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0$$

$\Delta b_i^0$   $\Rightarrow$  alteração de B ; Z

$$B = S_{B^0} \times B^0 \quad ; \quad Z = C^0 \times X$$

$\Delta a_{ij}^0 \Rightarrow$  alteração de  $a_{ij}$  ;  $c_j$  (fórmula alternativa)

$$C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0 \quad ; \quad A_T = A_T^0 \times S_{B^0 T}$$

## Exemplo Global

Uma empresa de confeções pode produzir 3 artigos: calças, saias e casacos.

Estima-se que a produção e venda dos artigos proporcione os seguintes lucros unitários: calças = 9,6 €, saias = 5 € e casacos = 18 €.

A empresa utiliza 3 recursos, cujas disponibilidades mensais são: 4.200 metros de tecido; 40 trabalhadores que trabalham cada 150 horas por mês; e 5.000 horas de funcionamento com máquinas.

Quantidade de cada recurso necessária para produzir cada produto:

	Tecido	Trabalho	Máquinas
Calças	3 m	3 h	2 h
Saias	2 m	2 h	3 h
Casacos	4 m	6 h	4 h

**Questão 1:** Formular o problema.

Trata-se dum problema de PL, em que:

$x_1$  = quantidade de calças a produzir mensalmente

$x_2$  = quantidade de saias a produzir mensalmente

$x_3$  = quantidade de casacos a produzir mensalmente

Formulação:

$$\text{Máx } Z = 9,6x_1 + 5x_2 + 18x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 4.200$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 6.000$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5.000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Questão 2:** Qual a solução ótima do problema?

Forma aumentada:

$$\text{Máx } Z = 9,6x_1 + 5x_2 + 18x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_1 = 4.200$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + s_2 = 6.000$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + s_3 = 5.000$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

**Quadro inicial**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	-9,6	-5	-18	0	0	0	<b>0</b>
$s_1$	3	2	4	1	0	0	4.200
$s_2$	3	2	6	0	1	0	6.000
$s_3$	2	3	4	0	0	1	5.000

**Iteração 1:**

Entra  $x_3$  (-18).

Sai  $s_2$  mín  $\{4.200/4 = 1.050 ; 6.000/6 = 1.000 ; 5.000/4 = 1.250\} = 1.000$

Pivô = 6

$$L_2 / 6 = L^*_2 \quad ; \quad 18 L^*_2 + L_0 \quad ; \quad -4 L^*_2 + L_1 \quad ; \quad -4 L^*_2 + L_3$$

**Quadro 1**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	-0,6	1	0	0	3	0	<b>18.000</b>
$s_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
$x_3$	1/2	1/3	1	0	1/6	0	1.000
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

**Iteração 2:**

Entra  $x_1$  (-0,6) ; Sai  $s_1$  mín  $\{200/1 = 200 ; 1.000/0,5 = 2.000\} = 200$ ; Pivô = 1

$$0,6 L_1 + L_0 \quad ; \quad -0,5 L_1 + L_2$$

Quadro 2

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	0,6	2,6	0	<b>18.120</b>
$x_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

**Solução ótima:**

$Z = 18.120$  € (lucro)

$x_1 = 200$  calças ;  $x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 900$  casacos

$s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 1.000$  horas de trabalho das máquinas que não são utilizadas.

**Questão 3:** Analise, economicamente, a coluna respeitante às saias e a linha zero?

**Análise económica:**

As saias são pouco lucrativas, pois o seu  $C_{mg}$  é superior ao  $R_{mg}$ . Por cada uma produzida, deixar-se-ia de produzir 2/3 de calças, com um custo de oportunidade de 6,4€ (=  $2/3 \times 9,6$  €). Como o lucro unitário é só de 5 €, logo haveria um prejuízo unitário = 1,4 €, o efeito líquido na função objetivo.

Se o lucro unitário das saias fosse = 6,4 €, então teríamos uma solução ótima alternativa. Se fosse maior que 6,4 €, então valeria a pena produzir saias.

Utilizar-se-ia, também, mais 5/3 de horas das máquinas (diminuição da folga) nessa produção unitária de saias.

Mais 1 hora de trabalho humano implicaria a diminuição da folga respetiva ( $s_2$ ), logo um acréscimo no lucro dado pelo preço sombra deste recurso ( $w_2 = 2,6$  €).

Mais 1 metro de tecido implicaria a diminuição da folga respetiva ( $s_1$ ), permitindo um acréscimo no lucro, dado pelo seu preço sombra, de  $w_1 = 0,6$  €.

Há 1.000 horas-máquina em excesso ( $w_3 = 0$ ).

O lucro total é de 18.120 €.

**Questão 4:** A empresa também pode fabricar sobretudos com um lucro unitário de 25 €. Para produzir um sobretudo são necessários 6 metros de tecido, 6 horas de trabalho e 6 horas de máquina. Valerá a pena produzir os sobretudos?

É o caso de uma nova variável.

Temos um novo coeficiente na função objetivo ( $c_4^0$ ), o qual se for negativo no quadro final indica que produzir sobretudos é lucrativo para a empresa. A nova coluna inicial de coeficientes técnicos desta nova variável  $x_4$  é {6, 6, 6}.

Fórmula para verificar o valor de  $c_4$ :

$$c_{n+1} = W \times a_{i,n+1}^0 - c_{n+1}^0$$

Novo  $c_j$ :  $[0,6 \quad 2,6 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} - 25 = -5,8$

Como o novo  $c_j$  é negativo, então vamos calcular os novos coeficientes técnicos da nova variável:

$$a_{i,n+1} = S_B^0 \times a_{i,n+1}^0$$

Novos  $a_{ij}$ :  $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

**Novo Quadro**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	<b>-5,8</b>	0,6	2,6	0	<b>18.120</b>
$x_1$	1	2/3	0	<b>2</b>	1	-2/3	0	200
$x_3$	0	0	1	<b>0</b>	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	0	5/3	0	<b>2</b>	0	-2/3	1	1.000



**Iteração 1:**

Entra  $x_4$  (-5,8). Sai  $x_1$  Mín  $\{200/2 = 100 ; 1000/2 = 500\} = 100$  ; Pivô = 2

$$L_1 / 2 = L^*_1 ; \quad 5,8 L^*_1 + L_0 ; \quad -2 L^*_1 + L_3$$

**Quadro Final**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	2,9	10/3	0	0	3,5	2/3	0	<b>18.700</b>
$x_4$	1/2	1/3	0	1	1/2	-1/3	0	100
$x_3$	0	0	1	0	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	-1	1	0	0	-1	0	1	800

**Nova solução ótima:**  $Z = 18.700$  (lucro) ;  $x_1 = 0$  calças ;  $x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 900$  casacos

$x_4 = 100$  sobretudos ;  $s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 800$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

**Questão 5:** Algumas encomendas precisam de ser acondicionadas em embalagens de tipo especial, tendo para tal sido montada uma secção específica na empresa. A capacidade máxima desta secção é de 1.500 calças ou 3.000 saias ou 1.000 casacos. O que acontece à solução ótima?

É o caso de uma nova restrição. Consideramos que esta nova secção tem uma capacidade de 100% que será dividida percentualmente pelos 3 produtos.

$$\frac{x_1}{1.500} + \frac{x_2}{3.000} + \frac{x_3}{1.000} \leq 1 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3.000$$

Se a solução ótima não for limitada por esta nova restrição, então não a consideraremos, concluindo que a solução ótima se mantém. Contudo, verifica-se que não é o caso, pois a solução ótima viola a nova restrição:

$$2 \times 200 + 1 \times 0 + 3 \times 900 = 3.100$$

Então, há que introduzir a nova linha:  $2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_4 = 3.000$

Para encontrar os valores no quadro final a partir dos valores iniciais da nova linha, há que retirar os valores das variáveis de decisão do quadro final. Assim, neste caso, em que  $x_1$  e  $x_3$  estão na base final, escrevemos as equações correspondentes, resolvendo-as e substituindo os resultados na nova equação de restrição:

Quadro final:

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	0,6	2,6	0	<b>18.120</b>
<b><math>x_1</math></b>	<b>1</b>	<b>2/3</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>-2/3</b>	<b>0</b>	<b>200</b>
<b><math>x_3</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>-1/2</b>	<b>1/2</b>	<b>0</b>	<b>900</b>
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + s_1 - \frac{2}{3}s_2 = 200 \\ x_3 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 = 900 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 + 200 \\ x_3 = \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 + 900 \end{cases}$$

$$2 \times \left( -\frac{2}{3}x_2 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 + 200 \right) + x_2 + 3 \times \left( \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2 + 900 \right) + s_4 = 3.000$$

$$-\frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{6}s_2 + s_4 = -100$$

Acrescentamos uma nova linha e uma nova coluna ao quadro final:

**Novo Quadro**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	0,6	2,6	0	0	<b>18.120</b>
$x_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	0	200
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	0	900
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	0	1.000
$s_4$	0	-1/3	0	-1/2	-1/6	0	1	-100

### Iteração 1:

Usa-se o algoritmo Simplex dual, visto o novo **b** ser negativo, violando a condição de não negatividade: Sai  $s_4$  (-100)

Entra  $s_1$  Máx  $\{1,4/-0,33 = -4,2 ; 0,6/-0,5 = -1,2 ; 2,6/-0,166 = -15,6\} = -1,2$

Pivô =  $-1/2$

$L_4 / -1/2 = L^*_4$  ;  $-0,6 L^*_4 + L_0$  ;  $-L^*_4 + L_1$  ;  $\frac{1}{2} L^*_4 + L_2$

### Quadro Final

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	b
<b>Z</b>	0	1	0	0	2,4	0	1,2	<b>18.000</b>
$x_1$	1	0	0	0	-1	0	2	0
$x_3$	0	1/3	1	0	2/3	0	-1	1.000
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	0	1.000
$s_1$	0	2/3	0	1	1/3	0	-2	200

### Nova solução ótima:

$Z = 18.000$  (lucro) ;  $x_1 = 0$  calças (sendo variável básica, a solução é degenerada)

$x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 1.000$  casacos ;  $s_1 = 200$  (nem todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 1.000$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

$s_4 = 0$  (toda a capacidade da secção de embalagem é utilizada)

**Questão 6:** A empresa assinou um contrato com uma loja, segundo o qual tem de fornecer 250 calças por mês. Como é afetada a solução?

$x_1 = 200$  não verifica a nova restrição.

$$x_1 \geq 250 \Rightarrow x_1 - s_4 + a_1 = 250$$

Retira-se a equação de  $x_1$  do quadro final para substituir na nova restrição:

Cálculo dos valores da nova linha:

$$\left\{ x_1 + \frac{2}{3}x_2 + s_1 - \frac{2}{3}s_2 = 200 \right\} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 + 200$$

$$\left( -\frac{2}{3}x_2 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 + 200 \right) - s_4 + a_1 = 250$$

$$-\frac{2}{3}x_2 - s_1 + \frac{2}{3}s_2 - s_4 + a_1 = 50$$

**Novo Quadro A**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$a_1$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	0,6	2,6	0	0	M	<b>18.120</b>
$x_1$	1	$2/3$	0	1	$-2/3$	0	0	0	200
$x_3$	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	0	900
$s_3$	0	$5/3$	0	0	$-2/3$	1	0	0	1.000
$a_1$	0	$-2/3$	0	-1	$2/3$	0	-1	1	50

Multiplicar a linha 4 por -M e somar à linha 0.

**Novo Quadro B**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$a_1$	b
<b>Z</b>	0	$1,4 + 2/3M$	0	$0,6 + M$	$2,6 - 2/3M$	0	M	0	<b><math>18.120 - 50M</math></b>
$x_1$	1	$2/3$	0	1	$-2/3$	0	0	0	200
$x_3$	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	0	900
$s_3$	0	$5/3$	0	0	$-2/3$	1	0	0	1.000
$a_1$	0	$-2/3$	0	-1	$2/3$	0	-1	1	50

**Iteração 1:**

Entra  $s_2$  ( $2,6 - 2/3M$ ). Sai  $a_1$  Mín  $\{900/0,5 = 1.800 ; 50/0,66 = 75\} = 75$ . Pivô =  $2/3$

$L_4 + L_1$  ;  $L_4 + L_3$  ;  $L_4 / 2/3 = L^*_4$  ;  $(-2,6 + 2/3M) L^*_4 + L_0$  ;  $-1/2 L^*_4 + L_2$

Quadro Final

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$a_1$	$b$
<b>Z</b>	0	4	0	4,5	0	0	3,9	M - 3,9	<b>17.925</b>
$x_1$	1	0	0	0	0	0	-1	1	250
$x_3$	0	0,5	1	0,25	0	0	0,75	-0,75	862,5
$s_3$	0	1	0	-1	0	1	-1	1	1.050
$s_2$	0	-1	0	-1,5	1	0	-1,5	1,5	75

**Nova solução ótima:**

$Z = 17.925$  (lucro) ;  $x_1 = 250$  calças ;  $x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 862$  casacos

$s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado) ;  $s_2 = 75$  (horas de trabalho humano não utilizadas)

$s_3 = 1050$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

$s_4 = 0$  (contrato cumprido com a loja)

**Questão 7:** A solução ótima (misto de produção) apresentada é válida para que variações dos lucros unitários das calças e das saias?

**Análise de sensibilidade de  $c^0_1$ :**

Utiliza-se a fórmula de determinação dos valores dos coeficientes das variáveis não básicas finais.

$$CW_T = S_{NBT} \times C_{BT}^0 - C_{NBT}^0 \geq 0$$

A matriz  $S_{NBT}$  inclui os coeficientes em coluna das variáveis não básicas em forma transposta. A matriz  $C_{BT}^0$  inclui os coeficientes originais das variáveis básicas finais em modo transposto. A matriz  $C_{NBT}^0$  inclui os coeficientes originais das variáveis não básicas finais em modo transposto.

Quadros inicial e final:

Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	b
Z	-9,6	-5	-18	0	0	0	0
s <sub>1</sub>	3	2	4	1	0	0	4.200
s <sub>2</sub>	3	2	6	0	1	0	6.000
s <sub>3</sub>	2	3	4	0	0	1	5.000
Base	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	b
Z	0	1,4	0	0,6	2,6	0	18.120
x <sub>1</sub>	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
x <sub>3</sub>	0	0	1	-1/2	1/2	0	900
s <sub>3</sub>	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

Cálculo dos limites:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & -2/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1^0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}c_1^0 - 5 \geq 0 \\ c_1^0 - \frac{1}{2} \times 18 \geq 0 \\ -\frac{2}{3}c_1^0 + \frac{1}{2} \times 18 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} c_1^0 \geq 7,5 \\ c_1^0 \geq 9 \\ c_1^0 \leq 13,5 \end{cases} \quad c_1^0 \in [9; 13,5]$$

Assumindo os limites do intervalo, então Z pode variar entre 18.000 e 18.900 €.

**Análise de sensibilidade de  $c_2^0$ :**

É uma variável não básica. Utiliza-se a fórmula de obtenção dos coeficientes das variáveis de decisão na solução final, ou custos reduzidos:

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 \geq 0$$

Cálculo dos limites:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9,6 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,6 \\ c_2^0 \\ 18 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_2^0 \in R \\ \frac{2}{3} \times 9,6 - c_2^0 \geq 0 \\ c_2^0 \in R \end{cases} \{c_2^0 \leq 6,4$$

Só para  $c_2^0 > 6,4$  é que  $x_2$  poderia entrar na base.

**Questão 8:** A solução ótima (misto de produção) apresentada é válida para que variações da quantidade total de tecido disponível?

**Análise de sensibilidade de  $b_1^0$ :**

Utiliza-se a fórmula de obtenção do valor das variáveis básicas na solução final.

$$B = S_{B^0} \times B^0 \geq 0$$

**Cálculo dos limites:**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1^0 \\ 6.000 \\ 5.000 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^0 - \frac{2}{3} \times 6.000 \geq 0 \\ -\frac{1}{2}b_1^0 + \frac{1}{2} \times 6.000 \geq 0 \\ b_1^0 \in R \end{cases} \begin{cases} b_1^0 \geq 4.000 \\ b_1^0 \leq 6.000 \end{cases}$$

$$b_1^0 \in [4000 ; 6000]$$

**Questão 9:** Para que valor de horas de trabalho da mão-de-obra a produção de saias passa a ser rentável?

**Análise de sensibilidade de  $a_{22}^0$ :**

Uma variação em  $a_{22}$  afeta a otimalidade porque é um coeficiente de uma variável não básica. Corresponde ao número de horas de trabalho (= 2) necessárias para produzir saias.

Utiliza-se a fórmula alternativa de obtenção dos coeficientes das variáveis de decisão na solução final, ou custos reduzidos:

$$C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0 \geq 0$$

**Cálculo dos limites:**

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & a_{22} & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,6 \\ 2,6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,6 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \{2 \times 0,6 + 2,6a_{22} - 5 \geq 0\} \{a_{22} \geq 1,4615\}$$

Para valores inferiores a 1,4615 a produção de saias já é lucrativa, logo  $x_2$  entraria para a base.

**Questão 10:** Um estudo revelou que é apenas necessária 1 hora de trabalho para confeccionar uma saia. O que acontece à solução ótima?

**Análise de variação de  $a_{22}^0$ :**

Para  $a_{22}^0 = 1$ , então é lucrativo produzir saias. Toda a coluna de  $x_2$  é alterada.

Utilizam-se as fórmulas de cálculo dos coeficientes técnicos e dos custos reduzidos, para alterar o quadro final.

**Cálculo da nova solução:**  $C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,6 \\ 2,6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,6 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_T = A_T^0 \times S_{B^0 T}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & -1/2 & 7/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Novo Quadro**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	-1,2	0	0,6	2,6	0	<b>18.120</b>
$x_1$	1	4/3	0	1	-1/2	0	200
$x_3$	0	-1/2	1	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	0	7/3	0	0	-2/3	1	1.000

**Iteração 1:**

Entra  $x_2$  (-1,2). Sai  $x_1$  Mín {200/1,33 = 150 ; 1.000/2,33 = 428} = 150 ; Pivô = 4/3

$$L_1 / 4/3 = L^*_1 ; \quad 1/2 L^*_1 + L_0 ; \quad 1/2 L^*_1 + L_2 ; \quad -7/3 L^*_1 + L_3$$



Quadro Final

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0,9	0	0	1,5	2	0	<b>18.300</b>
$x_2$	3/4	1	0	3/4	-1/2	0	150
$x_3$	3/8	0	1	-1/8	1/4	0	975
$s_3$	-7/4	0	0	-7/4	1/2	1	650

**Nova solução ótima:**

$Z = 18.300$  (lucro);  $x_1 = 0$  calças ;  $x_2 = 150$  saias ;  $x_3 = 975$  casacos

$s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 650$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

**Questão 11:** Que valores pode assumir o lucro de produção e venda de um casaco de modo que a solução apresentada seja ainda ótima?

**Análise de sensibilidade de  $c_3^0$ :**

Utiliza-se a fórmula de determinação dos valores dos coeficientes das variáveis não básicas finais, visto  $x_3$  ser uma variável básica:

$$CW_T = S_{NBT} \times C_{BT}^0 - C_{NBT}^0 \geq 0$$

**Cálculo dos limites:**

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 5/3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & -2/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9,6 \\ c_3^0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_3^0 \in R \\ 9,6 - \frac{1}{2}c_3^0 \geq 0 \\ -\frac{2}{3} \times 9,6 + \frac{1}{2}c_3^0 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} c_3^0 \leq 19,2 \\ c_3^0 \geq 12,8 \end{cases}$$

$$c_3^0 \in [12,8 ; 19,2]$$

Assumido os limites do intervalo, Z variará entre 13.440 e 19.200.

**Questão 12:** Por alteração do preço de venda das saias, o respetivo lucro unitário passa a ser de 7,5. Quais são as consequências?

#### Análise de variação de $c^0_2$ :

Utilizam-se as fórmulas dos custos reduzidos e dos preços sombra:

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0$$

Cálculo dos novos valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9,6 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,6 \\ 7,5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Novo Quadro

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	-1,1	0	0,6	2,6	0	<b>18.120</b>
$x_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

#### Iteração 1:

Entra  $x_2$  (-1,1). Sai  $x_1$  Mín {200/0,66 = 300 ; 1.000/1,66 = 600} = 300 ; Pivô = 2/3

$$L_2 / 2/3 = L^*_2 \quad ; \quad 1,1 L^*_2 + L_0 \quad ; \quad -5/3 L^*_2 + L_3$$

#### Quadro Final

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	1,65	0	0	2,25	1,5	0	<b>18.450</b>
$x_2$	3/2	1	0	3/2	-1	0	300
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	-5/2	0	0	-5/2	1	1	500

#### Nova solução ótima:

Z = 18.450 (lucro) ;  $x_1$  = 0 calças ;  $x_2$  = 300 saias ;  $x_3$  = 900 casacos

$s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 500$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

**Questão 13:** Entre que valores pode variar a disponibilidade mensal de horas de trabalho, de modo que o programa ótimo de produção se mantenha válido?

**Análise de sensibilidade de  $b_2^0$ :**

Utiliza-se a fórmula de obtenção do valor das variáveis básicas na solução final.

$$B = S_{B^0} \times B^0 \geq 0$$

**Cálculo dos limites:**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.200 \\ b_2^0 \\ 5.000 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4.200 - \frac{2}{3}b_2^0 \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \times 4.200 + \frac{1}{2}b_2^0 \geq 0 \\ -\frac{2}{3}b_2^0 + 5.000 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} b_2^0 \leq 6.300 \\ b_2^0 \geq 4.200 \\ b_2^0 \leq 7.500 \end{cases}$$

$$b_2^0 \in [4200 ; 6300]$$

**Questão 14:** Alguns trabalhadores podem fazer horas extraordinárias, aumentando as horas disponíveis em 10%. Como é afetada a solução?

**Análise de variação de  $b_2^0$ :**

Novo  $b_2^0 = 6600$

Utiliza-se a fórmula de determinação dos valores das variáveis básicas:

$$B = S_{B^0} \times B^0$$

**Cálculo dos novos valores:**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.200 \\ 6.600 \\ 5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 1.200 \\ 600 \end{bmatrix}$$

$$Z = 9,6 \times (-200) + 5 \times 0 + 18 \times 1200 = 19.680$$

**Novo Quadro**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	1,4	0	0,6	2,6	0	<b>19.680</b>
$x_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	-200
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	1.200
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	600

**Iteração 1:**

Aplicando o algoritmo Simplex dual:

Sai  $x_1$  (-200) e entra  $s_2$  Máx  $\{2,6/-0,66 = -3,9\} = -3,9$  ; Pivô = -2/3

$L_1 / -2/3 = L^*_1$  ;  $2/3 L^*_1 + L_3$  ;  $-2,6 L^*_1 + L_0$  ;  $-1/2 L^*_1 + L_2$

**Quadro Final**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	3,9	4	0	4,5	0	0	<b>18.900</b>
$s_2$	-3/2	-1	0	-3/2	1	0	300
$x_3$	3/4	1/2	1	1/4	0	0	1.050
$s_3$	-1	1	0	-1	0	1	800

**Nova solução ótima:**

$Z = 18.900$  (lucro) ;  $x_1 = 0$  calças ;  $x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 1050$  casacos

$s_1 = 0$  (todo o tecido é utilizado)

$s_2 = 300$  (horas de trabalho humano não utilizadas)

$s_3 = 800$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

**Questão 15:** Devido à quebra nos preços de venda das calças, o seu lucro unitário passou a ser de 8. Como é afetada a solução?

**Análise de variação de  $c_1^0$ :**

Novo  $c_1^0 = 8$

Utilizam-se as fórmulas de determinação dos valores dos coeficientes da linha 0:

$$C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 \quad ; \quad W_T = S_T \times C_{BT}^0 \quad ; \quad Z = C^0 \times X$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Z = 8 \times 200 + 18 \times 900 = 17.800$$

**Novo quadro**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	0	1/3	0	-1	11/3	0	<b>17.800</b>
$x_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
$x_3$	0	0	1	-1/2	1/2	0	900
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

**Iteração 1:**

Entra  $s_1$  (-1) e sai  $x_1$  Máx  $\{200/1 = 200\} = 200$  ; Pivô = 1

$L_1 + L_0$  ;  $1/2 L_1 + L_2$

**Quadro final**

Base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	1	1	0	0	3	0	<b>18.000</b>
$s_1$	1	2/3	0	1	-2/3	0	200
$x_3$	1/2	1/3	1	0	1/6	0	1.000
$s_3$	0	5/3	0	0	-2/3	1	1.000

**Nova solução ótima:**

$Z = 18.000$  (lucro)

$x_1 = 0$  calças ;  $x_2 = 0$  saias ;  $x_3 = 1000$  casacos

$s_1 = 200$  (metros tecido não utilizado)

$s_2 = 0$  (todas as horas de trabalho humano são utilizadas)

$s_3 = 1.000$  (horas de trabalho das máquinas não utilizadas)

## Programação Inteira

Caso de PL em que as variáveis só podem assumir valores inteiros. No caso de tal acontecer só com algumas variáveis, então chama-se programação inteira mista.

Há também a programação inteira binária, que permite responder a questões de sim ou não a propósito de decisões sobre investimentos alternativos, locais alternativos, se um local deve ou não ser escolhido, se se deve manter aberta uma fábrica, se se deve escolher determinada rota para os camiões, se devemos iniciar a atividade num determinado período, se devemos vender um ativo, etc.

## Exemplo

Uma empresa quer estudar a possibilidade de construir uma nova fábrica em Portugal ou na China, ou em ambos os sítios. Também considera a hipótese de construir um novo depósito junto da nova fábrica. O capital disponível para investir é de 12 milhões de euros. Pretende-se maximizar o valor atual líquido total.

**Dados:**

Decisão	Sim ou Não	Variável	Valor atual líquido	Capital necessário
1	Fábrica em Portugal	$x_1$	5 milhões	3 milhões
2	Fábrica na China	$x_2$	9 milhões	6 milhões
3	Depósito em Portugal	$x_3$	4 milhões	2 milhões
4	Depósito na China	$x_4$	6 milhões	5 milhões

**Formulação:**

Maximização da rentabilidade do investimento:  $\text{Máx } Z = 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4$

Limite de capital para investir:  $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 12$

Só se pretende construir um novo depósito:  $x_3 + x_4 \leq 1$

O novo depósito ficará junto da nova fábrica:

$$x_3 \leq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_3 \leq 0$$

$$x_4 \leq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad -x_2 + x_4 \leq 0$$

$x_j$  é binária para  $j = 1, 2, 3, 4$ .

**Solução:**

Pode-se construir as duas fábricas e um depósito em Portugal:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1 ; x_4 = 0$$

$$Z = 5 + 9 + 4 = 18$$



### 3. Modelo de Transporte

#### Conceitos gerais

Estrutura geral dum problema de transportes com **m** origens e **n** destinos:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Total das ofertas nas origens = total das procura nos destinos

$C_{ij}$  – custo unitário

Pretende-se minimizar o custo total.

É um caso particular de PL, porque todas as restrições são equações, os coeficientes de todas as variáveis são = 1 e as restrições são constituídas pelas somas das quantidades que saem de cada origem para todos os destinos, e que afluem a cada destino de todas as origens.

#### Exemplo

$i$  = fábrica ;  $j$  = armazém

Necessidades diárias do armazém 1 =  $x_{11} + x_{21} = 1000$

Necessidades diárias do armazém 2 =  $x_{12} + x_{22} = 1500$

Necessidades diárias do armazém 3 =  $x_{13} + x_{23} = 2500$

Produção da fábrica A =  $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000$

Produção da fábrica B =  $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3000$

Custos unitários de transporte:

Fábricas	Armazéns		
	1	2	3
A	2	1	0,5
B	1	0,5	2

Função objetivo:

$$\text{Mín } Z = 2x_{11} + x_{12} + 0,5x_{13} + x_{21} + 0,5x_{22} + 2x_{23}$$

Estabelece-se o maior valor possível para uma variável com custos mínimos:

$$x_{13} = 2000 \Rightarrow x_{23} = 500 \Rightarrow x_{11} = 0$$

$$x_{22} = 1500 \Rightarrow x_{12} = 0 \Rightarrow x_{21} = 1000$$

Custo mínimo:

$$Z = 2 \times 0 + 1 \times 0 + 0,5 \times 2000 + 1 \times 1000 + 0,5 \times 1500 + 2 \times 500 = 3750$$

Pelo método Simplex obteríamos a mesma solução com muito mais cálculos.

## Algoritmo Simplex de Transporte

### Método do custo menor

Das 2 hipóteses a 0,5, escolhemos aquela que nos dá maior volume de transporte. E assim continuamos até preencher todas as células de quantidades.

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	0	1	0	0,5	2.000	2.000
B	1		0,5		2		3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	0	1	0	0,5	2.000	2.000
B	1	1.000	0,5	1.500	2	500	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

$$Z = 0,5 \times 2000 + 1 \times 1000 + 0,5 \times 1500 + 2 \times 500 = 3750$$

Há sempre  $m + n - 1$  variáveis básicas. No exemplo:  $2 + 3 - 1 = 4$

As variáveis básicas iniciais, neste caso, são  $x_{13}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$  e  $x_{23}$ .

Há que verificar se esta solução é ótima. Para tal, criamos uma variável em linha ( $u_i$ ) e outra em coluna ( $v_j$ ) que, somadas, serão iguais ao custo unitário de transporte respetivo.

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

Para que não entrem na base novas variáveis, então com as não básicas deve acontecer o seguinte **critério de otimalidade**:

$$c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$$

Estabelece-se que  $u_1 = 0$  (e, se for necessário, far-se-á o mesmo com outras variáveis) para calcular em cadeia todos os outros valores das variáveis:

$$u_1 + v_3 = 0,5 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 0,5 \quad (1)$$

$$u_2 + v_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 1,5 \Rightarrow v_1 = -0,5 \quad (3)$$

$$u_2 + v_2 = 0,5 \quad ; \quad u_2 = 1,5 \Rightarrow v_2 = -1 \quad (4)$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad ; \quad v_3 = 0,5 \Rightarrow u_2 = 1,5 \quad (2)$$

Estes valores permitem calcular os **coeficientes das variáveis não básicas**:

$$c_{11} - u_1 - v_1 \geq 0 \quad 2 - 0 - 0,5 = 1,5$$

$$c_{12} - u_1 - v_2 \geq 0 \quad 1 - 0 - (-1) = 2$$

Os valores nas variáveis não básicas são  $\geq 0$ , logo a solução é ótima.

### Método do canto noroeste

Procura-se preencher as células começando no canto noroeste até chegar ao canto sudeste:

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	1.000	1	1.000	0,5	0	2.000
B	1	0	0,5	500	2	2.500	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

$$Z = 2 \times 1.000 + 1 \times 1.000 + 0,5 \times 500 + 2 \times 2.500 = 8.250$$

Verificando se a solução é ótima:

$$u_1 + v_1 = 2 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 2$$

$$u_1 + v_2 = 1 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 1$$

$$u_2 + v_2 = 0,5 \quad ; \quad v_2 = 1 \Rightarrow u_2 = -0,5$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad ; \quad u_2 = -0,5 \Rightarrow v_3 = 2,5$$

Estes valores permitem calcular os **coeficientes das variáveis não básicas**:

$$c_{13} - u_1 - v_3 \geq 0 \quad 0,5 - 0 - 2,5 = -2 \Rightarrow \text{entrar}$$

$$c_{21} - u_2 - v_1 \geq 0 \quad 1 - (-0,5) - 2 = -0,5$$

### As iterações:

Para facilitar a determinação da variável básica, que se deverá anular para permitir o incremento da não básica sem violar as restrições, representa-se por  $\theta$  aquele incremento, adicionando e subtraindo de forma a que as somas nas linhas e colunas não sejam alteradas.

Começa-se na variável não básica, que vai entrar para a base, e depois acertam-se as somas só nas variáveis básicas. No caso, vai entrar para a Base a variável  $x_{13}$  :

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	1.000	1	1.000 - $\theta$	0,5	0 + $\theta$	2.000
B	1		0,5	500 + $\theta$	2	2.500 - $\theta$	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

Há situações em que se tem de fazer um percurso entre as variáveis que não é tão direto. Não esquecer que só pode sair uma variável da Base em troca com a que entra.

O valor que permite fazer a iteração é 1.000.

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	1.000	1	0	0,5	1.000	2.000
B	1	0	0,5	1.500	2	1.500	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

$$Z = 2 \times 1.000 + 0,5 \times 1.000 + 0,5 \times 1.500 + 2 \times 1.500 = 6.250$$

Sai a variável  $x_{12}$

Aplica-se, de novo, o critério de otimalidade:

$$u_1 + v_1 = 2 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 2$$

$$u_1 + v_3 = 0,5 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 0,5$$

$$u_2 + v_2 = 0,5 \quad ; \quad u_2 = 1,5 \Rightarrow v_2 = -1$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad ; \quad v_3 = 0,5 \Rightarrow u_2 = 1,5$$

**Coeficientes das variáveis não básicas:**

$$c_{12} - u_1 - v_2 \geq 0 \quad 1 - 0 - (-1) = 2$$

$$c_{21} - u_2 - v_1 \geq 0 \quad 1 - 1,5 - 2 = -2,5 \Rightarrow \text{entrar}$$

Vai entrar a variável  $x_{21}$

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	1.000 - $\Theta$	1	0	0,5	1.000 + $\Theta$	2.000
B	1	0 + $\Theta$	0,5	1.500	2	1.500 - $\Theta$	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

O valor que permite fazer a iteração é 1.000.

Fábricas	Armazéns						Total
	1		2		3		
	custo	qt.	custo	qt.	custo	qt.	
A	2	0	1	0	0,5	2.000	2.000
B	1	1.000	0,5	1.500	2	500	3.000
Total		1.000		1.500		2.500	5.000

$$Z = 0,5 \times 2.000 + 1 \times 1.000 + 0,5 \times 1.500 + 2 \times 500 = 3.750$$

Sai a variável  $x_{11}$

Aplica-se, de novo, o critério de otimalidade:

$$u_1 + v_3 = 0,5 \quad ; \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_3 = 0,5$$

$$u_2 + v_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 1,5 \Rightarrow v_1 = -0,5$$

$$u_2 + v_2 = 0,5 \quad ; \quad u_2 = 1,5 \Rightarrow v_2 = -1$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad ; \quad v_3 = 0,5 \Rightarrow u_2 = 1,5$$

**Coefficientes das variáveis não básicas:**

$$c_{11} - u_1 - v_1 \geq 0 \quad 2 - 0 - (-0,5) = 2,5$$

$$c_{12} - u_1 - v_2 \geq 0 \quad 1 - 0 - (-1) = 2$$

Obtivemos a solução ótima.

**Nota:** nem sempre o método do custo menor permite a obtenção da solução ótima. No entanto, é provável que se fique mais próximo dela do que com a utilização do método do canto noroeste. Este aplica-se para problemas muito grandes (muitas linhas e colunas), que dificultam a aplicação do método do custo menor.

## 4. Modelo de Afetação

### Conceitos gerais

Aplica-se este modelo à afetação de trabalhadores a tarefas, de modo a que cada trabalhador só tenha uma tarefa. Assim, as variáveis só tomam os valores 0 ou 1.

Por exemplo, 5 trabalhadores para 5 tarefas implicava estudar 120 soluções possíveis ( $P_5 = 5! = 120$ ).

Também é um problema equacionável em termos de PL: trabalhador  $i$  para a tarefa  $j$ .

$C_{ij}$  – custo do trabalhador a desempenhar a tarefa.

Pretende-se minimizar o custo total.

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \quad \vee \quad x_{ij} = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

As matrizes deverão ser sempre quadradas. Logo, quando faltarem linhas (trabalhadores) ou colunas (tarefas), dever-se-á acrescentar novas linhas ou colunas de zeros.

Utiliza-se o **Método Húngaro** para resolver este tipo de problemas. Podemos subdividi-lo em 10 fases:

- (1) Subtrair o menor elemento de cada coluna a todos os elementos dessa coluna.
- (2) Subtrair o menor elemento de cada linha a todos os elementos dessa linha.

- (3) Escolher linhas, começando com a de menor número de zeros e prosseguindo por ordem crescente de zeros. Marcar um zero na linha e eliminar os zeros existentes nas mesmas linha e coluna. Proceder do mesmo modo até já não haver zeros para marcar ou cortar. Se se obtiver só um zero marcado em cada linha e em cada coluna, então esse conjunto de zeros define uma solução ótima. Caso contrário, continua-se o método.
- (4) Marcar todas as linhas que não tenham um zero marcado.
- (5) Marcar, nas linhas antes marcadas, todas as colunas que tenham pelo menos um zero cortado.
- (6) Marcar, nas colunas antes marcadas, todas as linhas que tenham zeros marcados.
- (7) Repetir os passos 5 e 6 até não haver mais linhas ou colunas para marcar.
- (8) Assinalar todas as linhas não marcadas e todas as colunas marcadas.
- (9) Considerar o menor elemento da submatriz dos elementos não assinalados por aquelas linhas e colunas. Subtrair esse valor a todos os elementos dessa submatriz, e somá-lo aos elementos da intersecção entre as linhas e colunas assinaladas.
- (10) Recomeçar no passo 3.

## Exemplo

Numa empresa, pretende-se alocar 5 trabalhadores a 5 tarefas. Os custos unitários são:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	17,5	15	9	5,5	12
2	16	16,5	10,5	5	10,5
3	12	15,5	14,5	11	5,5
4	4,5	8	14	17,5	13
5	13	9,5	8,5	12	17,5



Subtração nas colunas: C1 – 4,5 ; C2 – 8 ; C3 – 8,5 ; C4 – 5 ; C5 – 5,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	13	7	0,5	0,5	6,5
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Subtração nas linhas: L1 – 0,5 ; L2 – 0 ; L3 – 0 ; L4 – 0 ; L5 – 0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12,5	6,5	0	0	6
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Marcar e cortar zeros:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12,5	6,5	0	0	6
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12,5	6,5	0	0	6
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12,5	6,5	0	0	6
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12,5	6,5	0	0	6
2	11,5	8,5	2	0	5
3	7,5	7,5	6	6	0
4	0	0	5,5	12,5	7,5
5	8,5	1,5	0	7	12

Marcar linhas e colunas:

Trabalhadores	Tarefas					Marcação
	1	2	3	4	5	
1	12,5	6,5	0	0	6	1
2	11,5	8,5	2	0	5	3
3	7,5	7,5	6	6	0	
4	0	0	5,5	12,5	7,5	
5	8,5	1,5	0	7	12	3
Marcação			2	2		

Assinalar linhas e colunas:

Trabalhadores	Tarefas					Marcação
	1	2	3	4	5	
1	12,5	6,5	0	0	6	1
2	11,5	8,5	2	0	5	3
3	7,5	7,5	6	6	0	
4	0	0	5,5	12,5	7,5	
5	8,5	1,5	0	7	12	3
Marcação			2	2		

Valor mínimo na submatriz não assinalada (células brancas) = 1,5

Subtração deste valor nesta submatriz e somatório nas células de intersecção de linhas e colunas assinaladas:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Marcar e cortar zeros:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	11	5	0	0	4,5
2	10	7	2	0	3,5
3	7,5	7,5	7,5	7,5	0
4	0	0	7	14	7,5
5	7	0	0	7	10,5

Obteve-se uma solução ótima. Se tal não acontecesse, ter-se-ia de repetir os outros passos.

$$Z = 9 + 5 + 5,5 + 4,5 + 9,5 = 33,5$$

## Outros Casos

Um problema de afetação desequilibrado, com um número de trabalhadores que não seja igual ao número de tarefas, pode ser resolvido pela introdução de trabalhadores ou tarefas fictícios, com custos nulos (linhas ou colunas de zeros).

A imposição de tarefas impossíveis, isto é, que um dado trabalhador não possa realizar uma dada tarefa, pode ser resolvida através da introdução de um valor de custo  $M$ , muito grande quando comparado com os outros valores de custo.

## Exercício

Numa empresa, pretende-se alocar 4 trabalhadores a 5 tarefas, contudo o trabalhador 2 não poderá desempenhar a tarefa 3. Os custos unitários são:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	14	15	9	6	12
2	16	12	M	5	10
3	12	14	15	11	5
4	5	8	14	13	13
5	0	0	0	0	0

**Subtração nas colunas:** C1 – 0 ; C2 – 0 ; C3 – 0 ; C4 – 0 ; C5 – 0

**Subtração nas linhas:** L1 – 6 ; L2 – 5 ; L3 – 5 ; L4 – 5 ; L5 – 0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	8	9	3	0	6
2	11	7	M - 5	0	5
3	7	9	10	6	0
4	0	3	9	8	8
5	0	0	0	0	0

Marcar e cortar zeros:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	8	9	3	0	6
2	11	7	M - 5	0	5
3	7	9	10	6	0
4	0	3	9	8	8
5	0	0	0	0	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	8	9	3	0	6
2	11	7	M - 5	0	5
3	7	9	10	6	0
4	0	3	9	8	8
5	0	0	0	0	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	8	9	3	0	6
2	11	7	M - 5	0	5
3	7	9	10	6	0
4	0	3	9	8	8
5	0	0	0	0	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	8	9	3	0	6
2	11	7	M - 5	0	5
3	7	9	10	6	0
4	0	3	9	8	8
5	0	0	0	0	0

Não é solução óptima. Marcar linhas e colunas:

Trabalhadores	Tarefas					Marcações
	1	2	3	4	5	
1	8	9	3	0	6	3
2	11	7	M - 5	0	5	1
3	7	9	10	6	0	
4	0	3	9	8	8	
5	0	0	0	0	0	
Marcações				2		

Assinalar linhas e colunas:

Trabalhadores	Tarefas					Marcações
	1	2	3	4	5	
1	8	9	3	0	6	3
2	11	7	M - 5	0	5	1
3	7	9	10	6	0	
4	0	3	9	8	8	
5	0	0	0	0	0	
Marcações				2		

Valor a subtrair e somar = 3

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Voltar a marcar e cortar zeros:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	5	6	0	0	3
2	8	4	M - 8	0	2
3	7	9	10	9	0
4	0	3	9	11	8
5	0	0	0	3	0

Solução ótima:  $Z = 9 + 5 + 5 + 5 + 0 = 24$

Garantiu-se que o trabalhador 2 não executa a tarefa 3.

O trabalhador 5 é fictício, a tarefa 2 não será executada.





## 5. Otimização de Redes

### Tipos de problemas

**Árvore geradora mínima** – instalação de redes de energia ou comunicações de modo a que todas as localidades estejam ligadas entre si, utilizando as distâncias menores possíveis.

**Caminho mais curto** – entre a origem e o destino, passando por outros lugares.

**Fluxo máximo** – quantidade máxima que é possível transportar de uma origem para um destino, através de vários caminhos alternativos com restrições de quantidades.

**Fluxo de custo mínimo** – transportar uma quantidade fixa da origem para um destino da forma mais económica possível.

Os problemas de Transporte e de Afetação são casos especiais do problema de fluxo de custo mínimo.

Utiliza-se o algoritmo do Simplex para redes.

O estudo das redes assenta na **Teoria dos Grafos**.

Um **grafo**  $G$  é um conjunto finito  $V$  de pontos (vértices, nós ou nodos) e um conjunto  $A$  de linhas (arcos, ligações ou ramos), que ligam todos ou alguns desses pontos.

$$a = (v_i, v_f)$$

Se  $i = f$  então denomina-se lacete.

O **grafo** pode ser **orientado** (todos os arcos orientados), **não orientado** (arestas) ou **misto** (com arcos e arestas).

Há **vértices antecessores**, de onde partem arcos para os **vértices sucessores**.

Dois **arcos** são **adjacentes** ou conexos se possuírem um vértice comum.

**Cadeia** entre um vértice inicial e um final é uma sucessão de arcos que ligam esses dois vértices, os quais podem ser diretos (orientados no sentido certo) ou inversos. Se o vértice inicial for também final, então estamos perante um **ciclo**.

Arcos orientados todos no mesmo sentido fazem um **caminho**, que se voltar ao início constitui um **circuito**.

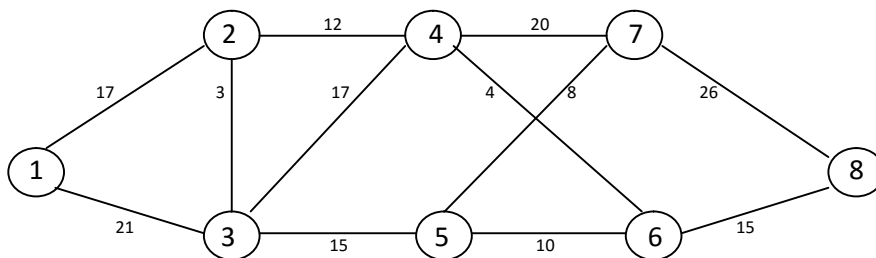
Os grafos podem ainda ser conexos, desconexos, completos ou parciais, e ainda podemos construir subgrafos e subgrafos parciais.

Uma **rede** é um grafo onde existem valores associados (capacidades) a todos os arcos ou arestas.

## Exemplo

Uma rede de ruas onde se pretende instalar cabos telefónicos para ligar todas as localidades. As arestas têm os seus comprimentos assinalados.

- Pretende-se construir a **árvore geradora de menor distância total**.



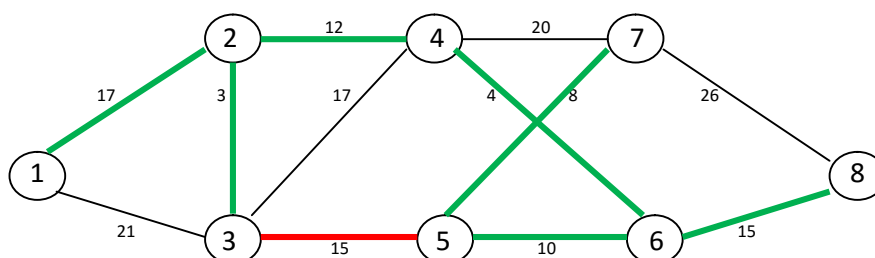
Este problema pode ser formulado em Programação Linear Inteira. Contudo, é possível usar algoritmos específicos na sua resolução.

## Algoritmo de Kruskal

Introduzem-se na rede as arestas por ordem crescente de capacidades, evitando a formação de ciclos. Tendo a rede 8 vértices, então a árvore geradora terá 7 arestas.

Entra por ordem crescente:

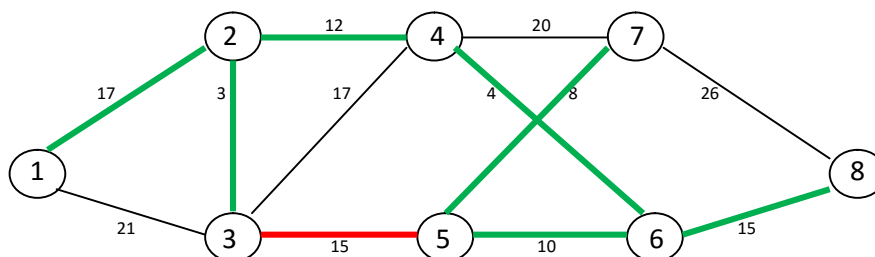
(2, 3) = 3 ; (4, 6) = 4 ; (5, 7) = 8 ; (5, 6) = 10 ; (2, 4) = 12 ; [(3, 5) = 15 fecha um ciclo, logo não pode entrar] ; (6, 8) = 15 e (1, 2) = 17. Num total de 69 de distância mínima.



## Algoritmo de Prim

Partindo de qualquer vértice, agrega-se o vértice mais perto de cada estrutura crescente intermédia.

Por exemplo, começando no vértice 7: **(7, 5)** , **(5, 6)** , **(6, 4)** , **(4, 2)** , **(2, 3)** , **[(3, 5)** fecha um ciclo, logo não entra], **(6, 8)** e **(2, 1)**. Num total de 69 de distância mínima. Por coincidência a mesma árvore, mas podem existir outras árvores com a mesma distância mínima, isto é, soluções ótimas alternativas.



Passo 1 – construir uma tabela de distâncias entre os nós. Os que não podem ser conectados com outros aparecem com a letra M na tabela (será um grande número).

Passo 2 – seleccionar um nó qualquer para iniciar o algoritmo, marcando-o com um X e apagando a coluna encimada por esse nó.

Passo 3 – encontrar o valor mais pequeno em todas as linhas marcadas com um X e assinalá-lo. A coluna contendo este valor marcado indica o novo nó conectado.

Passo 4 – marcar o novo nó conectado com um X e apagar a coluna encimada por ele. Repetir os passos 3 e 4 até todos os nós estarem conectados.

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	17	21	M	M	M	M	M
2	17	0	3	12	M	M	M	M
3	21	3	0	17	15	M	M	M
4	M	12	17	0	M	4	20	M
5	M	M	15	M	0	10	8	M
6	M	M	M	4	10	0	M	15
7	M	M	M	20	8	M	0	26
8	M	M	M	M	M	15	26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>X1</b>		17	21	M	M	M	M	M
<b>2</b>		0	3	12	M	M	M	M
<b>3</b>		3	0	17	15	M	M	M
<b>4</b>		12	17	0	M	4	20	M
<b>5</b>		M	15	M	0	10	8	M
<b>6</b>		M	M	4	10	0	M	15
<b>7</b>		M	M	20	8	M	0	26
<b>8</b>		M	M	M	M	15	26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>X1</b>		17	21	M	M	M	M	M
<b>X2</b>			3	12	M	M	M	M
<b>3</b>			0	17	15	M	M	M
<b>4</b>			17	0	M	4	20	M
<b>5</b>			15	M	0	10	8	M
<b>6</b>			M	4	10	0	M	15
<b>7</b>			M	20	8	M	0	26
<b>8</b>			M	M	M	15	26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>X1</b>		17		M	M	M	M	M
<b>X2</b>			3	12	M	M	M	M
<b>X3</b>				17	15	M	M	M
<b>4</b>				0	M	4	20	M
<b>5</b>				M	0	10	8	M
<b>6</b>				4	10	0	M	15
<b>7</b>				20	8	M	0	26
<b>8</b>				M	M	15	26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>X1</b>		17			M	M	M	M
<b>X2</b>			3	12	M	M	M	M
<b>X3</b>					15	M	M	M
<b>X4</b>					M	4	20	M
<b>5</b>					0	10	8	M
<b>6</b>					10	0	M	15
<b>7</b>					8	M	0	26
<b>8</b>					M	15	26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
X1		17			M		M	M
X2			3	12	M		M	M
X3					15		M	M
X4					M	4	20	M
5					0		8	M
X6					10		M	15
7					8		0	26
8					M		26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
X1		17					M	M
X2			3	12			M	M
X3							M	M
X4						4	20	M
X5							8	M
X6					10		M	15
7							0	26
8							26	0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
X1		17						M
X2			3	12				M
X3								M
X4						4		M
X5							8	M
X6					10			15
X7								26
8								0

De para	1	2	3	4	5	6	7	8
X1		17						
X2			3	12				
X3								
X4						4		
X5							8	
X6					10			15
X7								
X8								

Solução ótima:  $(1, 2) = 17 + (2, 3) = 3 + (2, 4) = 12 + (4, 6) = 4 + (5, 7) = 8 + (6, 5) = 10 + (6, 8) = 15$ , num total mínimo de distância igual a 69.

- Pretende-se determinar o caminho mais curto entre 1 e 8.

Temos outro problema de minimização que pode ser formulado em Programação Linear Inteira.

## Algoritmo de Dijkstra

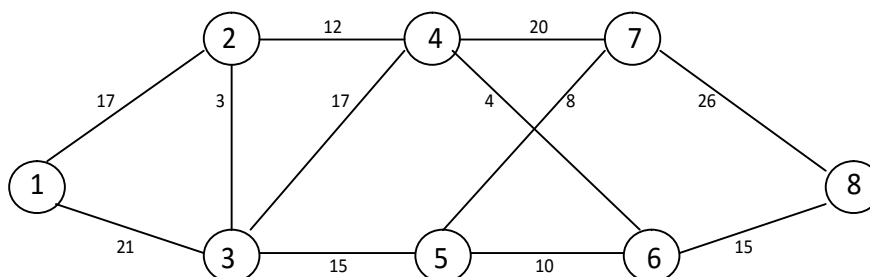
Definição de 2 vetores:

$\pi(j)$  – comprimento do caminho mais curto entre o vértice inicial 1 e o vértice  $j$ .

$$\pi(j) = \begin{cases} c_{1j} & \text{se } j \text{ é um sucessor direto do vértice 1} \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\rho(j)$  – designa o vértice antecessor de  $j$  no caminho mais curto entre o vértice inicial 1 e  $j$ .

$$\rho(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ é um sucessor direto do vértice 1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



### Método prático:

- Pesquisando os vértices sucessores de 1, verifica-se que em **(1, 2)** temos  $\pi(2) = 17$  e  $\rho(2) = 1$ , e em **(1, 3)** temos  $\pi(3) = 21$  e  $\rho(3) = 1$ . Assim,  $17 < 21$ , logo o vértice a etiquetar será o 2.
- A partir do vértice 2 podemos ir para o 3, com  $[\pi(3) = 17 + 3 = 20$  e  $\rho(3) = 2]$  ou para o vértice 4, com  $[\pi(4) = 17 + 12 = 29$  e  $\rho(4) = 2]$ . Como  $20 < 29$ , etiquetar o 3.
- A partir do vértice 3 podemos ir para o 4, com  $[\pi(4) = 20 + 17 = 37$  e  $\rho(4) = 3]$ , ou para o vértice 5, com  $[\pi(5) = 20 + 15 = 35$  e  $\rho(5) = 3]$ . Como  $35 < 37$ , etiquetar o 5.
- A partir do vértice 4 podemos ir para o 6, com  $[\pi(6) = 29 + 4 = 33$  e  $\rho(6) = 4]$ , ou para o vértice 7, com  $[\pi(7) = 29 + 20 = 49$  e  $\rho(7) = 4]$ . Como  $33 < 49$ , etiquetar o 6.

- A partir do vértice 5 podemos ir para o 6, com  $[\pi(6) = 35 + 10 = 45 \text{ e } \rho(6) = 5]$ , e para o 7, com  $[\pi(7) = 35 + 8 = 43 \text{ e } \rho(7) = 5]$ . Como  $43 < 45$ , etiquetar o 7.
- A partir do vértice 6 só temos um caminho para o 8, com  $[\pi(8) = 33 + 15 = 48 \text{ e } \rho(8) = 6]$ , que é o seu sucessor e fim do caminho.
- A partir do vértice 7 podemos ir para o 8, com  $[\pi(8) = 43 + 26 = 69 \text{ e } \rho(8) = 7]$ , que é o seu sucessor e fim do caminho.
- Analisamos agora as colunas, marcando todas as células com menor distância, estando algumas já assinaladas por serem também as menores distâncias na análise das linhas. Assim, marca-se o **(6, 8) = 48**, que corresponderá à distância mais curta total. Por último, marca-se também o **(2, 4) = 29**.
- Agora, resta reconstituir o caminho mais curto de 1 a 8 andando para trás: o antecessor de 8 é o 6, deste o 4, deste o 2 e deste o 1. Assim temos **(1, 2, 4, 6, 8) = 48** como solução ótima.

	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$	$\pi - \rho$
<b>1</b>	2 - 17	3 - 21					
<b>2</b>		3 - 20	4 - 29				
<b>3</b>			4 - 37	5 - 35			
<b>4</b>					6 - 33	7 - 49	
<b>5</b>					6 - 45	7 - 43	
<b>6</b>							8 - 48
<b>7</b>							8 - 69

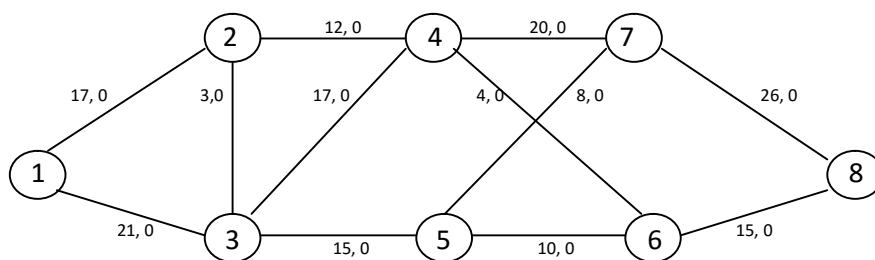
Este tipo de problemas também se aplica ao planeamento faseado de investimentos ou à substituição de equipamentos, tendo os arcos associados custos em vez de distâncias.

Este algoritmo não pode ser aplicado a redes com valores dos arcos negativos, caso de receitas e custos na mesma rede. Neste caso utiliza-se o algoritmo de Ford. Temos ainda o algoritmo de Floyd que nos ajuda a encontrar os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices.

- Pretende-se determinar o plano ótimo de transporte que maximize a quantidade de produto enviada entre 2 pontos (problema de fluxo máximo). No caso, a quantidade máxima de mensagens entre a sede (1) e o centro de distribuição (8) por unidade de tempo.

## Algoritmo de Ford-Fulkerson

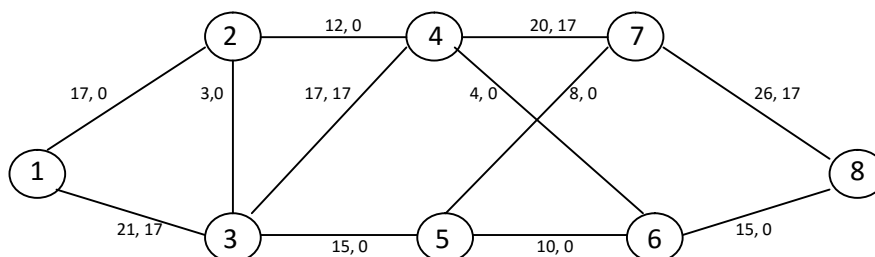
Colocamos nos arcos um par de números (a, b), indicando a capacidade e fluxo. Inicialmente:



Escolher um caminho maximizador inicial: podemos passar 21 mensagens do vértice 1 para o 3. Depois só passam 17 para o vértice 4. Daqui passam as 17 para o vértice 7. E estas 17 mensagens passam para o vértice 8.

Então, a cadeia é (1, 3, 4, 7, 8), passando um máximo de 17 mensagens.

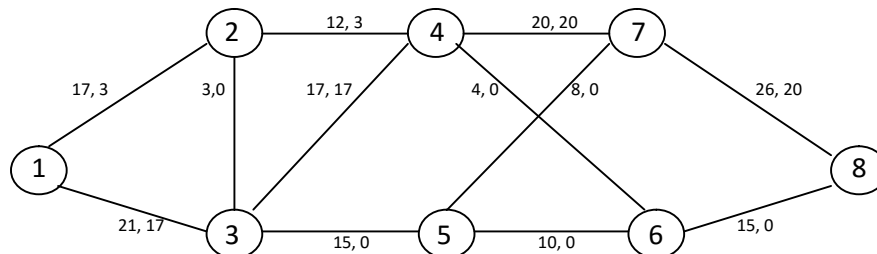
A rede fica com este aspeto:



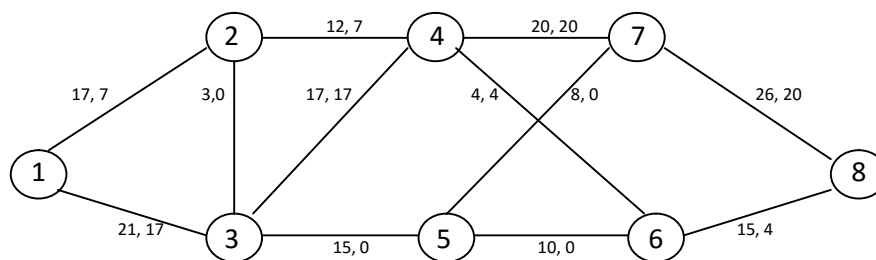
Continuando as iterações do algoritmo, exploramos outra cadeia de aumento, procurando o mínimo das diferenças entre capacidade e fluxo entre cada par de vértices:



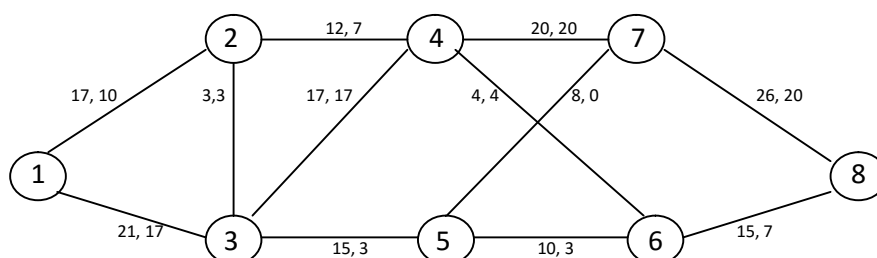
Passando de 1 para 2 (capacidade, fluxo) = (17, 0); de 2 para 4 (12, 0); de 4 para 7 (20, 17), mas como na primeira cadeia tinham passado aqui 17 mensagens, então passam mais 3 neste arco, as quais conseguem passar de 7 para 8 (26, 17). Reconstituindo o fluxo para trás, ao longo da nova cadeia (8, 7, 4, 2, 1), passamos a ter um total de  $17 + 3 = 20$  mensagens a passar de 1 a 8.



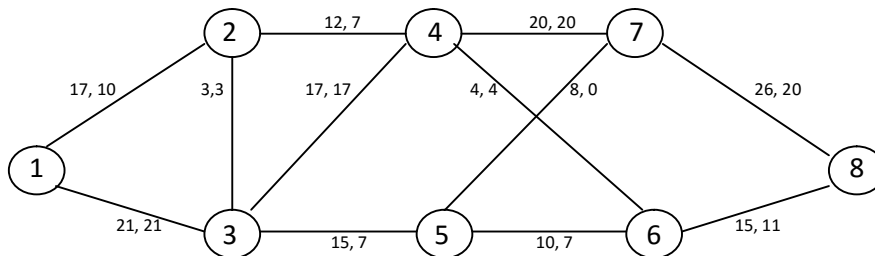
Continuando, exploramos outra cadeia de aumento, passando de 1 para 2 (capacidade, fluxo) = (17, 3), de 2 para 4 (12, 3), de 4 para 6 (4, 0), e de 6 para 8 (15, 0). O mínimo são mais 4 mensagens que vão passar, saturando o arco entre 4 e 6. Reconstituindo o fluxo para trás, ao longo da nova cadeia (8, 6, 4, 2, 1), passamos a ter um total de  $20 + 4 = 24$  mensagens a passar de 1 a 8.



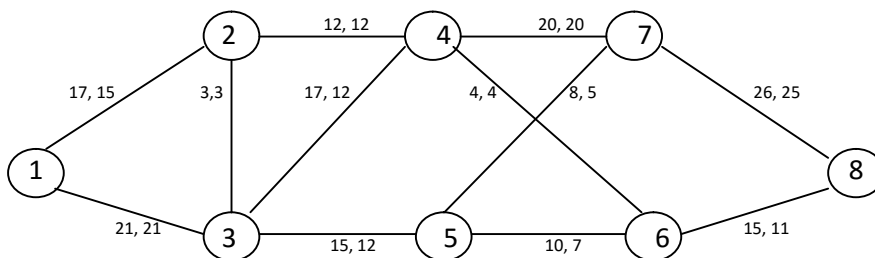
Nova cadeia de aumento: (1, 2, 3, 5, 6, 8), tendo um mínimo de 3 mensagens no arco (2, 3), passando o total para  $24 + 3 = 27$  mensagens.



Outra cadeia: (1, 3, 5, 6, 8), com um mínimo de 4 mensagens no arco (1, 3), logo  $27 + 4 = 31$  no total.



Temos mensagens para sair no arco (1, 2) mas a partir do vértice 4 existe saturação. Podíamos recanalizar parte do fluxo da primeira cadeia, evitando estas saturações e conseguindo fazer passar mais mensagens. Pela cadeia (1, 2, 4) é possível fazer passar mais 5 mensagens, logo podemos recanalizar 5 mensagens da cadeia (3, 4, 7, 8) para (3, 5, 7, 8):



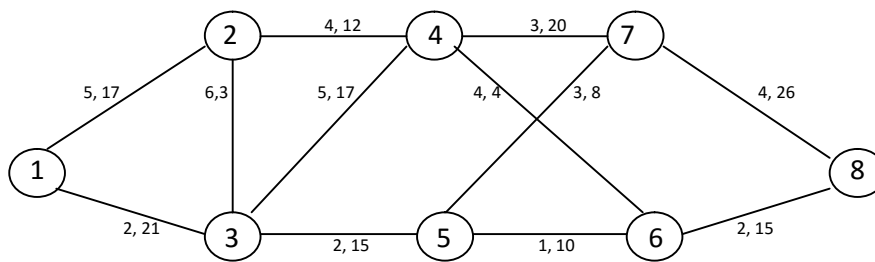
E agora já podemos passar aquelas 5 mensagens pela cadeia (1, 2, 4, 7, 8), elevando o total para  $31 + 5 = 36$  mensagens.

Já não se consegue fazer passar mais mensagens por causa da saturação dos arcos.

**Nota:** Se um vértice tiver limitações de passagem, subdivide-se em 2 vértices ligados por essa restrição.

- Pretende-se determinar na rede uma passagem do fluxo entre os vértices 1 e N com um valor  $\theta \leq F$ , sendo F o valor do fluxo máximo da rede com o menor custo possível. No caso, qual a combinação de itinerários que permite enviar 20 mensagens entre a sede (vértice 1) e o centro de distribuição (vértice 8) ao menor custo?

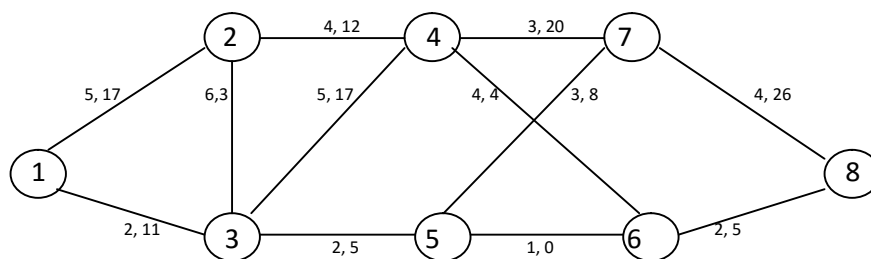
Temos a rede com (custo unitário, capacidade):



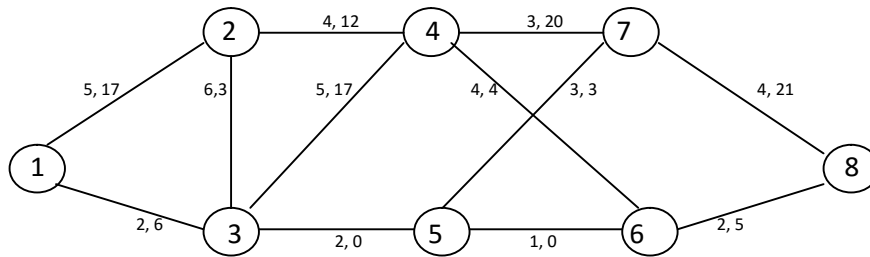
## Algoritmo de Busacker-Gowen

O caminho mais curto (barato) é (1, 3, 5, 6, 8) =  $2 + 2 + 1 + 2 = 7$  de custo unitário.

Como o mínimo (21, 15, 10, 15) = 10 mensagens.  $10 \times 7 = 70$



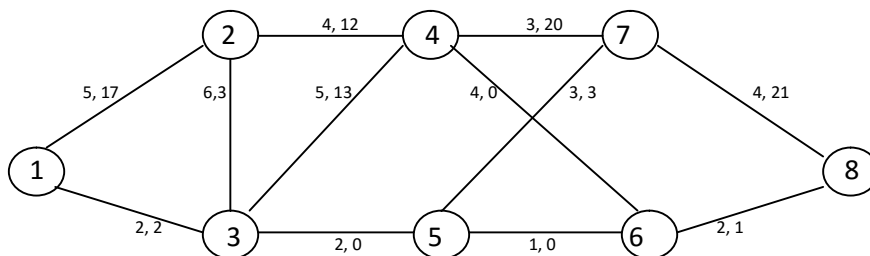
De seguida temos (1, 3, 5, 7, 8) com custo de  $2 + 2 + 3 + 4 = 11$ , permitindo a passagem de  $\min(11, 5, 8, 26) = 5$ . Então o total passa para  $10 + 5$  mensagens, como valor do fluxo, ainda inferior a  $\theta = 20$ .  $70 + 5 \times 11 = 125$



Nova (1, 3, 4, 6, 8) com custo  $2 + 5 + 4 + 2 = 13$  e  $\min(6, 17, 4, 5) = 4$ ,

logo  $15 + 4 = 19 (< 20)$

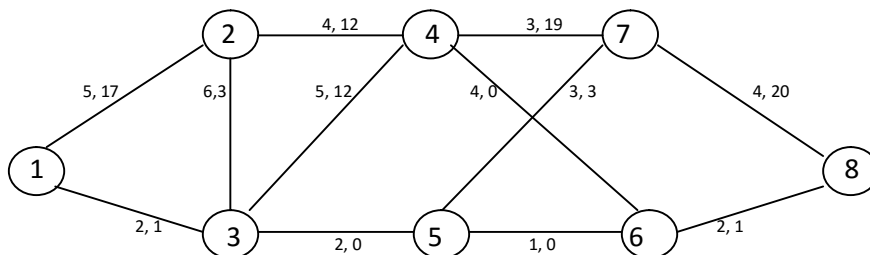
$$125 + 4 \times 13 = 177$$



Nova (1, 3, 4, 7, 8) com custo  $2 + 5 + 3 + 4 = 14$  e  $\min(2, 13, 20, 21) = 2$ ,

logo  $19 + 2 = 21 (> 20)$

$$177 + 1 \times 14 = 191$$



Solução ótima:  $(1, 3) = 20 \times 2 = 40$ ;  $(3, 4) = 5 \times 5 = 25$ ;  $(3, 5) = 15 \times 2 = 30$ ;  $(4, 7) = 1 \times 3 = 3$ ;  $(4, 6) = 4 \times 4 = 16$ ;  $(5, 7) = 5 \times 3 = 15$ ;  $(5, 6) = 10 \times 1 = 10$ ;  $(7, 8) = 6 \times 4 = 24$ ;  $(6, 8) = 14 \times 2 = 28$

Total mínimo de custos para 20 mensagens = 191.

## 6. Exercícios

**Exercício 1:** calcular a solução ótima.

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Exercício 2:** Numa empresa, o produto  $x_1$  gasta 2 unidades do recurso A e uma unidade do recurso B, tendo um lucro unitário de 1 euro. Enquanto o produto  $x_2$  gasta 5 unidades de A e uma unidade de B, tendo um lucro unitário de 2 euros. Existe disponibilidade de 20 unidades do recurso A e 8 unidades do recurso B, por minuto. Formule o problema e resolva-o pelo método Simplex.

**Exercício 3:** calcular a solução ótima.

$$\text{Máx } Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$0,5x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Exercício 4:** calcular a solução ótima.

$$\text{Mín } Z = x_1 + 1,5x_2$$

$$0,5x_1 + x_2 \leq 7,5$$

$$2x_1 + x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Exercício 5:** calcular a solução ótima.

$$\text{Mín } Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Exercício 6:** calcular a solução ótima.

$$\text{Mín } Z = 80x_1 + 60x_2$$

$$0,2x_1 + 0,32x_2 \leq 0,25$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Exercício 7:** fazer a formulação do problema.

Num infantário pretende-se servir um lanche barato, mas que respeite as necessidades nutricionais das crianças. Cada criança deve receber: entre 400 a 600 calorias, sendo, no máximo, 30% com origem em gorduras; pelo menos, 60 mg de vitamina C e 12 g de proteína. Para cada sanduíche são precisas duas fatias de pão e, pelo menos, o dobro da pasta de amendoim em relação à geleia. Devem tomar, pelo menos, um copo, que pode ser de leite e/ou de sumo. Dados:

Alimento	Calorias nas gorduras	Total de calorias	Vit. C (mg)	Proteína (g)	Custo (cênt.)
Pão (uma fatia)	10	70	0	3	5
Pasta de amendoim (colher de sopa)	75	100	0	4	4
Geleia de morango (colher de sopa)	0	50	3	0	7
Biscoito integral (unidade)	20	60	0	1	8
Leite (1 copo)	70	150	2	8	15
Sumo (1 copo)	0	100	120	1	35

**Exercício 8:** Fazer a análise de sensibilidade dos coeficientes da função objetivo e dos totais de recursos disponíveis:

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$b$			$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$b$
<b>Z</b>	-3	-5	0	0	0	<b>0</b>		<b>Z</b>	0	0	0	3/2	1	<b>36</b>
$s_1$	1	0	1	0	0	4		$s_1$	0	0	1	1/3	-1/3	2
$s_2$	0	2	0	1	0	12		$x_2$	0	1	0	1/2	0	6
$s_3$	3	2	0	0	1	18		$x_1$	1	0	0	-1/3	1/3	2

- Qual a solução ótima se  $c_1^0 = 10$ ?
- Qual a solução ótima se  $b_2^0 = 20$ ?
- Uma nova variável com um lucro marginal = 3, necessitando de 1 unidade do recurso A e 1,5 unidades do recurso C. Qual a solução ótima?
- Nova restrição:  $x_1 + 2,5x_2 \leq 15$ . O que acontece à solução ótima?

**Exercício 9 :** Uma empresa fabrica dois tipos de cintos, A e B. O lucro unitário é de 2€ para o tipo A e de 1,5€ para o tipo B. O tempo de fabricação de A é o dobro do de B, e se só se produzir B, a empresa fabrica 1000 por dia. O aprovisionamento em couro é suficiente para 800 cintos por dia, dos dois tipos. Estão disponíveis 400 fivelas para o tipo A e 700 para o tipo B.

- Formule o problema.
- Quanto produzir dos dois tipos de cintos por dia, de modo a maximizar o lucro total?
- Faça a análise de sensibilidade para os recursos totalmente utilizados.
- Qual seria a solução ótima se tivéssemos couro para mais 100 cintos?

**Exercício 10:**

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$b$			$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$b$
<b>Z</b>	-6	-5	0	0	<b>0</b>		<b>Z</b>	0	0	7/4	3/8	<b>46,25</b>
$s_1$	3	2	1	0	20		$x_1$	1	0	1/2	-1/4	2,5
$s_2$	2	4	0	1	30		$x_2$	0	1	-1/4	3/8	6,25

- Qual será a solução se se produzir  $x_3$  com lucro unitário = 4 e usando 2 unidades do recurso A e 1 unidade de B?
- Qual será a solução se existir mais uma limitação:  $x_1 + 3x_2 \leq 15$  ?
- Faça a análise de sensibilidade dos coeficientes da função objetivo.
- Faça a análise de sensibilidade dos termos independentes das restrições.
- Qual a solução ótima se  $b_1^0 = 50$  ?
- Qual a solução ótima se  $c_1^0 = 8$  ?

**Exercício 11:** Uma fábrica produz dois tipos de enlatados e um subproduto neles utilizado, cujas margens líquidas estão na função objetivo a maximizar. Existem 3 restrições associadas ao processo produtivo:

$$\text{Máx } Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
<b>Z</b>	-2	1	-1	0	0	0	0	<b>Z</b>				1			
$s_1$	3	-2	2	1	0	0	15	$x_2$			5	1	3		
$s_2$	-1	1	1	0	1	0	3	$s_3$			2	0	1		
$s_3$	1	-1	1	0	0	1	4	$x_1$			4	1	2		

- Determine os valores que faltam no quadro final.
- Qual o intervalo de sensibilidade para o recurso A?
- Qual o intervalo de sensibilidade para  $c_1^0$  ?
- A margem líquida de  $x_1$  é agora = 1. Há alteração na solução ótima?



**Exercício 12:** Uma fábrica de mobiliário recebe placas de madeira de  $6 \text{ m}^2$  ( $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ ) que utiliza na produção de camas. Foram encomendadas à empresa 100 camas. Para a sua produção são necessários quatro componentes distintos, quer em forma, quer em dimensão:

Um (E)strado =  $1,5 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$

Uma (C)abeceira =  $1,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$

Um (F)undo =  $1,5 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$

Duas (L)aterais =  $2,0 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$

A empresa pretende minimizar os desperdícios, podendo ser executados os seguintes cortes:

- 1) 2 estrados ; 0 desperdício
- 2) 1 estrado + 2 laterais ;  $0,3 \times 2 = 0,6 \text{ m}^2$
- 3) 2 cabeceiras + 2 fundos ;  $0,2 \times 2 = 0,4 \text{ m}^2$
- 4) 1 estrado + 1 cabeceira ;  $0,8 \times 1,5 = 1,2 \text{ m}^2$
- 5) 1 estrado + 3 fundos ;  $0,2 \times 1,5 = 0,3 \text{ m}^2$
- 6) 1 cabeceira + 1 fundo + 2 laterais ;  $0,2 \times 1,5 + 0,3 \times 2 = 0,9 \text{ m}^2$

- Formule e resolva o problema.

**Exercício 13:** Um empresário tem ao seu dispor a possibilidade de produzir 3 tipos diferentes de vestidos. O lucro unitário é de 5, 8 e 10 euros. A fábrica tem capacidade para transformar 900 metros de tecido por dia, sendo que, respetivamente, cada vestido consome 3; 3,4 e 3,8 metros. As horas de confeção cifram-se, respetivamente, em 2; 2,2 e 2,4 horas, para um total de 600 horas-dia de trabalho. No mínimo, tem de se produzir 200 vestidos por dia, dos menos lucrativos, por causa das encomendas do estrangeiro. Qual a solução ótima?

**Exercício 14:** Uma empresa pretende lançar uma campanha publicitária nas vésperas do lançamento de um novo produto. O orçamento disponível é de 50.000 euros. Sabe-se que 1 minuto de publicidade custa, em média, 75 euros na rádio e 1.500 euros na televisão. As pesquisas de mercado apontam para a ineficácia de utilizar mais de 400 minutos de tempo na rádio. Mesmo assim, pretende-se comprar, pelo menos, o dobro de tempo de rádio do que de televisão. Sabendo que 1 minuto de publicidade televisiva é cerca de 25 vezes mais eficaz do que um minuto de rádio na atração de novos clientes, como deveria o Diretor de Marketing investir o seu orçamento?

**Exercício 15:** calcular a solução ótima.

i = produtor ; j = retalhista

$$\text{Produção de A} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 850$$

$$\text{Produção de B} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 600$$

$$\text{Produção de C} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 700$$

$$\text{Necessidades mensais da loja 1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300$$

$$\text{Necessidades mensais da loja 2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 350$$

$$\text{Necessidades mensais da loja 3} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 950$$

$$\text{Necessidades mensais da loja 4} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 550$$

$$\text{Min } Z = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 2,5x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 2,5x_{32} + 5x_{33} + x_{34}$$

**Exercício 16:** calcular a solução ótima.

i = centro de distribuição ; j = fábrica

$$\text{Centro de distribuição A} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3500$$

$$\text{Centro de distribuição B} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6000$$

$$\text{Centro de distribuição C} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 5500$$

$$\text{Necessidades mensais da fábrica 1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4000$$

$$\text{Necessidades mensais da fábrica 2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3500$$

$$\text{Necessidades mensais da fábrica 3} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3000$$

$$\text{Necessidades mensais da fábrica 4} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 4500$$

$$\text{Min } Z = 2x_{11} + 2,5x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 2,5x_{21} + 3x_{22} + 3,5x_{23} + 2,5x_{24} + 3x_{31} + 2,5x_{32} + 4x_{33} + 1,5x_{34}$$

**Exercício 17:** Uma empresa tem 3 centros de distribuição de produtos e pretende minimizar os seus custos de distribuição para as 5 lojas que detém no mercado. Dados: capacidade de distribuição do centro A, em toneladas por mês: 10 mil; do centro B: 6 mil; e do centro C: 9 mil. Necessidades mensais da loja 1: 4,5 mil; loja 2: 3,5 mil; loja 3: 6 mil; loja 4: 5 mil; e da loja 5: 6 mil. Custos unitários de transporte:

$c_{11} = 1$ ;  $c_{12} = 1,5$ ;  $c_{13} = 2$ ;  $c_{14} = 2,5$ ;  $c_{15} = 2,5$ ;  $c_{21} = 0,5$ ;  $c_{22} = 0,5$ ;  $c_{23} = 1,5$ ;  $c_{24} = 1,5$ ;  $c_{25} = 2$ ;  $x_{31} = 1,5$ ;  $c_{32} = 1$ ;  $c_{33} = 1,5$ ;  $c_{34} = 2$ ;  $c_{35} = 3$ .

Formule e resolva o problema.

**Exercício 18:** calcular a solução ótima.

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	7,5	12	8,5	5	12
2	14	13,5	10,5	6	10
3	7	11	10,5	11	6,5
4	14,5	10	14	13,5	13
5	13	12	9,5	12	14,5

**Exercício 19:** Uma empresa tem 4 trabalhadores para realizar 5 tarefas. Sabendo que o trabalhador 2 não consegue realizar a tarefa 3, qual será a solução ótima, com os seguintes custos:

Trabalhadores	Tarefas				
	1	2	3	4	5
1	12	10	9	10,5	11
2	13	11		10	12
3	12,5	10	9	11	11,5
4	14	13	12	10	12

**Exercício 20:** Uma empresa tem 5 trabalhadores para realizar 4 tarefas. Qual será a solução ótima, com os seguintes custos:

Trabalhadores	Tarefas			
	1	2	3	4
1	8	6,5	7	6,5
2	9	6	8	7
3	8,5	7	7	6,5
4	8	6,5	8	7
5	7	6	6,6	6



## 7. Soluções

**Exercício 1:** O plano ótimo de produção é de 2 unidades de  $x_1$  e 6 unidades de  $x_2$ .

Utilizam-se totalmente as 12 unidades de recurso B e as 18 do recurso C.

Sobram 2 unidades do recurso A, que é utilizado parcialmente (= 2).

Sendo a margem de contribuição de 3 unidades monetárias para  $x_1$  e 5 para  $x_2$ , então o lucro é de 36 unidades monetárias.

**Exercício 2:**  $x_1 = 20/3$  ;  $x_2 = 4/3$

Os recursos A e B são totalmente utilizados ( $s_1$  e  $s_2 = 0$ ) . O lucro total é de 28/3.

**Exercício 3:**  $Z = 38$  ;  $x_1 = 2$  ;  $x_2 = 6$

$s_1 = 3$  (recurso A não totalmente utilizado)

$s_2 = 0$  (recurso B totalmente utilizado)

$s_3 = 0$  (recurso C totalmente utilizado)

**Exercício 4:**  $x_1 = 7,5$  ;  $x_2 = 0$  ;  $s_1 = 3,75$  ;  $s_2 = 0$  ;  $Z = 7,5$

**Exercício 5:**  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 0$  ;  $x_3 = 1$  ;  $s_1 = 6$  ;  $s_2 = 1$  ;  $Z = 1$

**Exercício 6:**  $x_1 = 0,583$  ;  $x_2 = 0,416$  ;  $s_1 = 0$  ;  $Z = 71,666$

**Exercício 7:**

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 15x_5 + 35x_6$$

$$20x_1 + 75x_2 + 20x_4 + 70x_5 \leq 0,3 \quad (140x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 150x_5 + 100x_6) \Leftrightarrow$$

$$-22x_1 + 45x_2 - 15x_3 + 2x_4 + 25x_5 - 30x_6 \leq 0$$

$$140x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 150x_5 + 100x_6 \leq 600$$

$$140x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 60x_4 + 150x_5 + 100x_6 \geq 400$$

$$3x_3 + 2x_5 + 120x_6 \geq 60$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_4 + 8x_5 + x_6 \geq 12$$

$$x_2 \geq 2x_3 \Leftrightarrow x_2 - 2x_3 \geq 0$$

$$x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

**Exercício 8:**  $c_1^0 \in [0 ; 7,5]$  ;  $c_2^0 \in [2 ; +\infty]$

$b_1^0 \in [2 ; +\infty]$  ;  $b_2^0 \in [6 ; 18]$  ;  $b_3^0 \in [12 ; 24]$

- $x_1 = 4$  ;  $x_2 = 3$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 6$  ;  $s_3 = 0$  ;  $Z = 55$
- $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 9$  ;  $s_1 = 4$  ;  $s_2 = 2$  ;  $s_3 = 0$  ;  $Z = 45$
- $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 6$  ;  $x_3 = 4$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 0$  ;  $s_3 = 0$  ;  $Z = 42$
- $x_1 = 30/11$  ;  $x_2 = 54/11$  ;  $s_1 = 14/11$  ;  $s_2 = 24/11$  ;  $s_3 = 0$  ;  $s_4 = 0$  ;  
 $Z = 32,73$

**Exercício 9:**

Máx  $Z = 2x_1 + 1,5x_2$  - lucro total diário

$x_1 \leq 400$  - fivelas disponíveis de A

$x_2 \leq 700$  - fivelas disponíveis de B

$x_1 + x_2 \leq 800$  - limitação do couro

$2x_1 + x_2 \leq 1000$  - limitação do tempo

$x_1, x_2 \geq 0$  - condição de não negatividade

- Solução ótima: produzem-se 200 cintos A e 600 cintos B. Sobram 200 fivelas de A e 100 fivelas de B. Utiliza-se todo o couro e todo o tempo. Lucro ótimo de 1.300€ por dia.

- $b_3^0 \in [600 ; 850]$  ;  $b_4^0 \in [900 ; 1.200]$
- Produção: cintos A ( $x_1$ ) = 150 ; cintos B ( $x_2$ ) = 700 ; Sobram: fivelas A ( $s_1$ ) = 250 ; couro ( $s_3$ ) = 50 ; gastam-se totalmente as fivelas B ( $s_2 = 0$ ) e o tempo ( $s_4 = 0$ ). O lucro total é de  $Z = 1.350$  €.

**Exercício 10:**  $Z = 46,67$  ;  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 6,67$  ;  $x_3 = 3,33$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 0$

- $Z = 43,57$  ;  $x_1 = 4,29$  ;  $x_2 = 3,57$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 50/7$
- $c_1^0 \in [2,5 ; 7,5]$  ;  $c_2^0 \in [4 ; 12]$
- $b_1^0 \in [15 ; 45]$  ;  $b_2^0 \in [13,33 ; 40]$
- $Z = 90$  ;  $x_1 = 7,5$  ;  $x_2 = 0$  ;  $s_1 = 5$  ;  $s_2 = 0$
- $Z = 53,33$  ;  $x_1 = 6,67$  ;  $x_2 = 0$  ;  $s_1 = 5$  ;  $s_2 = 50/3$

**Exercício 11:**

$c_1 = c_2 = w_3 = 0$  – variáveis básicas

$a_{11} = 0$ ;  $a_{21} = 0$ ;  $a_{31} = 1$  – vetor da matriz I

$a_{12} = 1$ ;  $a_{22} = 0$ ;  $a_{32} = 0$  – vetor da matriz I

$s_{13} = 1$ ;  $s_{23} = 0$ ;  $s_{33} = 0$  – vetor da matriz I

Usar fórmulas:

$$c_3 = 5 \times (-1) + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 1 = 2$$

$$w_2 = 3 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times 2 = 1$$

$$b_1 = 1 \times 15 + 3 \times 3 + 0 \times 4 = 24$$

$$b_2 = 0 \times 15 + 1 \times 3 + 1 \times 4 = 7$$

$$b_3 = 1 \times 15 + 2 \times 3 + 0 \times 4 = 21$$

$$Z = 2 \times 21 - 24 + 0 = 18$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	b
Z	0	0	2	1	1	0	18
$x_2$	0	1	5	1	3	0	24
$s_3$	0	0	2	0	1	1	7
$x_1$	1	0	4	1	2	0	21

- $b_1^0 \in [0; +\infty]$
- $c_1^0 \in [1,5; +\infty]$
- $x_1 = 7$  ;  $x_2 = 6,5$  ;  $x_3 = 3,5$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 0$  ;  $s_3 = 0$  ;  $Z = 4$

### Exercício 12:

As variáveis  $x_j$  têm a ver com os 6 tipos de cortes:

$$\text{Mín } Z = 0x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 1,2x_4 + 0,3x_5 + 0,9x_6$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 100 \quad (\text{estrados})$$

$$2x_3 + x_4 + x_6 \geq 100 \quad (\text{cabeceiras})$$

$$2x_3 + 3x_5 + x_6 \geq 100 \quad (\text{fundos})$$

$$2x_2 + 2x_6 \geq 200 \quad (\text{laterais})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$\text{Solução ótima: } x_1 = 49,5 \text{ ; } x_2 = 1 \text{ ; } x_3 = 50 \text{ ; } x_4 = 0 \text{ ; } x_5 = 0 \text{ ; } x_6 = 0$$

$$Z = 20,6 \text{ m}^2$$

**Exercício 13:** Produção: vestido A ( $x_1$ ) = 200 ; vestido B ( $x_2$ ) = 0 ; vestido C ( $x_3$ ) = 78,95

Todo o tecido é utilizado ( $s_1 = 0$ ), assim como é cumprido o contrato de exportação

( $s_3 = 0$ ). Sobram  $s_2 = 10,53$  horas de confecção. O lucro total é de  $Z = 1.789,50$  €.



**Exercício 14:**

$$x_1 = 2.000/33 = 60,606 \text{ minutos na rádio} \Rightarrow 4.545,45 \text{ €}$$

$$x_2 = 1.000/33 = 30,303 \text{ minutos na televisão} \Rightarrow 45.454,55 \text{ €}$$

$$s_1 = 0 \quad \text{– orçamento todo aplicado}$$

$$s_2 = 11.200/33 \text{ – tempo restante de eficácia na rádio} = 339,39 \text{ minutos}$$

$$Z = 9.000/11 = 818,18 \text{ – nível de eficácia}$$

**Exercício 15:**  $Z = 5.425$  ;  $x_{11} = 300$  ;  $x_{12} = 200$  ;  $x_{13} = 350$  ;  $x_{14} = 0$  ;  $x_{21} = 0$  ;  $x_{22} = 0$  ;  
 $x_{23} = 600$  ;  $x_{24} = 0$  ;  $x_{31} = 0$  ;  $x_{32} = 150$  ;  $x_{33} = 0$  ;  $x_{34} = 550$ .

**Exercício 16:**  $Z = 35.500$  ;  $x_{11} = 3.500$  ;  $x_{12} = 0$  ;  $x_{13} = 0$  ;  $x_{14} = 0$  ;  $x_{21} = 500$  ;  $x_{22} = 2.500$  ;  
 $x_{23} = 3.000$  ;  $x_{24} = 0$  ;  $x_{31} = 0$  ;  $x_{32} = 1.000$  ;  $x_{33} = 0$  ;  $x_{34} = 4.500$ .

**Exercício 17:**

$$\text{Min } Z = x_{11} + 1,5x_{12} + 2x_{13} + 2,5x_{14} + 2,5x_{15} + 0,5x_{21} + 0,5x_{22} + 1,5x_{23} + 1,5x_{24} + 2x_{25} + 1,5x_{31} + x_{32} + 1,5x_{33} + 2x_{34} + 3x_{35}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4500$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3500$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6000$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5000$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 6000$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 10000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 6000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 9000$$

$Z = 39.000$  ;  $x_{11} = 4.000$  ;  $x_{12} = 0$  ;  $x_{13} = 0$  ;  $x_{14} = 0$  ;  $x_{15} = 6.000$  ;  $x_{21} = 500$  ;  $x_{22} = 3.500$  ;  
 $x_{23} = 0$  ;  $x_{24} = 2.000$  ;  $x_{25} = 0$  ;  $x_{31} = 0$  ;  $x_{32} = 0$  ;  $x_{33} = 6.000$  ;  $x_{34} = 3.000$  ;  
 $x_{35} = 0$ .

**Exercício 18:**  $Z = 39,5$  ;  $x_{11} = x_{24} = x_{35} = x_{42} = x_{53} = 1$  ; As demais variáveis são  $= 0$ .

**Exercício 19:**  $Z = 41$  ;  $x_{13} = x_{25} = x_{32} = x_{44} = 1$  ; As demais variáveis são  $= 0$ .

Há soluções alternativas.

**Exercício 20:**  $Z = 26,5$  ;  $x_{13} = x_{22} = x_{34} = x_{51} = 1$  ; As demais variáveis são  $= 0$ .

Há soluções alternativas.

## 8. Apêndice 1 – Álgebra Matricial

### Representação matricial de equações

**Matriz:** conjunto retangular de elementos dispostos em linha e coluna.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3) \quad \times \quad (3 \times 1) = (3 \times 1)$$

**Tipos especiais de matrizes:**

- ❑ Matriz ou vetor linha
- ❑ Matriz ou vetor coluna
- ❑ Matriz significativa: pelo menos um elemento diferente de zero
- ❑ Matriz nula: todos os elementos iguais a zero

**Nas matrizes quadradas temos:**

- Diagonal principal:  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$
- Termo principal:  $a_{11} \times a_{22} \times a_{33}$
- Traço principal:  $a_{11} + a_{22} + a_{33}$
- Diagonal secundária:  $a_{31}, a_{22}, a_{13}$
- Termo secundário:  $a_{31} \times a_{22} \times a_{13}$
- Traço secundário:  $a_{31} + a_{22} + a_{13}$
- Elementos opostos:  $a_{12}; a_{21}$
- Matriz vazia: todos os elementos da diagonal principal = 0
- Matriz triangular superior:  $a_{12}, a_{13}, a_{23}$

- Matriz triangular inferior:  $a_{21}, a_{31}, a_{32}$
- Matriz identidade I: diagonal principal = 1; todos os outros = 0

## Operações com matrizes

**Adição de matrizes do mesmo tipo:**  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

**Multiplicação por um escalar:**  $2 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

**Multiplicação de matrizes:**  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

**Multiplicação pela matriz identidade:**  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

**Matriz inversa** (só as matrizes quadradas têm inversa):  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

## Matriz transposta e matriz inversa

**Matriz Transposta:**  $(m \times n) \rightarrow (n \times m)$  as linhas passam a colunas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

**Cálculo da matriz inversa:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2b_{11} + 3b_{21} = 1 \\ 2b_{12} + 3b_{22} = 0 \\ 1b_{11} + 5b_{21} = 0 \\ 1b_{12} + 5b_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10b_{21} + 3b_{21} = 1 \\ b_{12} = -\frac{3}{2}b_{22} \\ b_{11} = -5b_{21} \\ -\frac{3}{2}b_{22} + 5b_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = -\frac{1}{7} \\ b_{12} = -\frac{3}{7} \\ b_{11} = \frac{5}{7} \\ b_{22} = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Só há matrizes inversas caso seja quadradas e tenham linhas e colunas linearmente independentes. Pode não existir matriz inversa, sendo então uma matriz singular. Se tiver inversa é uma matriz não-singular.

**Cálculo da matriz inversa através do procedimento de eliminação gaussiana:**

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

O objetivo é, através de operações de eliminação gaussiana, somando linhas de forma ponderada e multiplicando ou dividindo por escalares, conseguir a matriz identidade no lugar da matriz original, obtendo-se no lugar da matriz identidade inicial a matriz inversa.

**$L_1 / 3$  para obter “1” na posição  $a_{11}$ :**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**$L_1 \times (-2) + L_2$  para obter “0” na posição  $a_{21}$ :**

**$-L_1 + L_3$  para obter “0” na posição  $a_{31}$ :**

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 10/3 & 8/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 17/3 & -11/3 & -1/3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$L_2 / 10/3$  para obter “1” na posição  $a_{22}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 17/3 & -11/3 & -1/3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$L_2 \times 2/3 + L_1$  para obter “0” na posição  $a_{12}$ :

$L_2 \times (-17/3) + L_3$  para obter “0” na posição  $a_{32}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & -41/5 & 4/5 & -17/10 & 1 \end{array} \right]$$

$L_3 / (-41/5)$  para obter “1” na posição  $a_{33}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6/5 & 13/41 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/41 & 17/82 & -5/41 \end{array} \right]$$

$L_3 \times (-6/5) + L_1$  para obter “0” na posição  $a_{13}$ :

$L_3 \times (-4/5) + L_2$  para obter “0” na posição  $a_{23}$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13/41 & -2/41 & 6/41 \\ 0 & 1 & 0 & -5/41 & 11/82 & 4/41 \\ 0 & 0 & 1 & -4/41 & 17/82 & -5/41 \end{array} \right]$$

Logo a matriz inversa  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 13/41 & -2/41 & 6/41 \\ -5/41 & 11/82 & 4/41 \\ -4/41 & 17/82 & -5/41 \end{bmatrix}$

## Resolução de equações com matrizes

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -7 \\ x_1 + 5x_2 = 14 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{I} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = -11 \ ; \ \mathbf{x}_2 = 5$$





## 9. Apêndice 2 – Formulário

### Análise de sensibilidade

- coeficientes das variáveis básicas:  $CW_T = S_{NBT} \times C_{BT}^0 - C_{NBT}^0 \geq 0$
- coeficientes de variáveis de não básicas:  $C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 \geq 0$
- termos independentes das restrições:  $B = S_{B^0} \times B^0 \geq 0$
- coeficientes técnicos:  $C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0 \geq 0$

### Análise de variação

$$\Delta c_j^0 \text{ básico} \Rightarrow C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0 ; W_T = S_T \times C_{BT}^0 ; Z = C^0 \times X$$

$$\Delta c_j^0 \text{ não básico} \Rightarrow C_T = A_T \times C_{BT}^0 - C_T^0$$

$$\Delta b_i^0 \Rightarrow B = S_{B^0} \times B^0 ; Z = C^0 \times X$$

$$\Delta a_{ij}^0 \Rightarrow C_T = A_T^0 \times W_T - C_T^0 ; A_T = A_T^0 \times S_{B^0T}$$

### Método Húngaro

- (1) Subtrair o menor elemento de cada coluna a todos os elementos dessa coluna.
- (2) Subtrair o menor elemento de cada linha a todos os elementos dessa linha.
- (3) Escolher linhas, começando com a de menor número de zeros e prosseguindo por ordem crescente de zeros. Marcar um zero na linha e eliminar os zeros existentes nas mesmas linha e coluna. Proceder do mesmo modo até já não haver zeros para marcar ou cortar.
- (4) Marcar todas as linhas que não tenham um zero marcado.
- (5) Marcar, nas linhas antes marcadas, todas as colunas que tenham pelo menos um zero cortado.
- (6) Marcar, nas colunas antes marcadas, todas as linhas que tenham zeros marcados.
- (7) Repetir os passos 5 e 6 até não haver mais linhas ou colunas para marcar.
- (8) Assinalar todas as linhas não marcadas e todas as colunas marcadas.
- (9) Considerar o menor elemento da submatriz dos elementos não assinalados por aquelas linhas e colunas. Subtrair esse valor a todos os elementos dessa submatriz, e somá-lo aos elementos da intersecção entre as linhas e colunas assinaladas.
- (10) Recomeçar no passo 3.

---

# Bibliografia

- TAVARES, Luís Valadares, OLIVEIRA, Rui Carvalho, THEMIDO, Isabel Hall, CORREIA, Francisco Nunes (1996) *Investigação Operacional*. Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.
- HILL, Manuela Magalhães, SANTOS, Mariana Marques dos (1999) *Investigação Operacional - Vol. 1 – Programação Linear*. Edições Sílabo.
- HILL, Manuela Magalhães, SANTOS, Mariana Marques dos (2008) *Investigação Operacional - Vol. 3 – Transportes, Afectação e Optimização de Redes*. Edições Sílabo.
- HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J. (2006) *Introdução à Pesquisa Operacional*, 8ª ed. McGraw-Hill Interamericana do Brasil, Lda.
- TAHA, Hamdy A. (2007) *Operations Research: An Introduction*, 8<sup>th</sup> Ed. Pearson Prentice Hall.

---